Table des matières

Première partie

Solutions des exercices de logique propositionnelle

Chapitre 1

Formules

Solutions

Solution 1.1. Théorème de lecture unique

1. Par induction sur φ.
   - Si φ est une proposition atomique p, on a $|p|_(= |p|_) = 0$;
   - Si φ est de la forme $\neg\psi$ où ψ est une formule, on a $|\varphi|_(= |\psi|_(= |\psi|_) = |\varphi|_)$.
   - Si φ est de la forme $(\psi \wedge \theta)$ où ψ, θ sont deux formules, on a $|\varphi|_(= 1 + |\psi|_(+ |\theta|_(= 1 + |\psi|_) + |\theta|_) = |\varphi|_)$.
   - Si φ est de la forme $(\psi \vee \theta)$ où ψ, θ sont deux formules, on a $|\varphi|_(= 1 + |\psi|_(+ |\theta|_(= 1 + |\psi|_) + |\theta|_) = |\varphi|_)$.
   - Si φ est de la forme $(\psi \to \theta)$ où ψ, θ sont deux formules, on a $|\varphi|_(= 1 + |\psi|_(+ |\theta|_(= 1 + |\psi|_) + |\theta|_) = |\varphi|_)$.
2. Par induction sur φ.
   - Si φ est une proposition atomique p, comme α un préfixe de φ, soit α est vide, soit $\alpha = p$. On a $|\alpha|_(= |\alpha|_) = 0$ et donc $|\alpha|_(\geqslant |\alpha|_)$.
   - Si φ est de la forme $\neg\psi$ où ψ est une formule, on a α vide ou $\alpha = \neg\beta$ avec β préfixe de ψ. Ainsi, $|\alpha|_(= |\beta|_(\geqslant |\beta|_) = |\alpha|_)$.
   - Si φ est de la forme $(\psi \bowtie \theta)$ où ψ, θ sont deux formules et $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \to\}$, on a quatre cas :
     - Si α est vide, $|\alpha|_(= 0 = |\alpha|_)$.
     - Si $\alpha = \varphi$, par la question 1, on a $|\alpha|_(= |\varphi|_(= |\varphi|_) = |\alpha|_)$.
     - Si $\alpha = (\beta$ avec β préfixe de ψ, on a, par induction,

       $$|\alpha|_(= 1 + |\beta|_(\geqslant 1 + |\beta|_) = 1 + |\alpha|_) \geqslant |\alpha|_).$$

     - Si $\alpha = (\psi \bowtie \gamma$ avec γ préfixe de θ, on a, par la question 1et par induction,

       $$|\alpha|_(= 1 + |\psi|_(+ |\gamma|_(= 1 + |\psi|_) + |\gamma|_(\geqslant 1 + |\psi|_) + |\gamma|_) \geqslant |\alpha|_).$$

3. Comme la formule φ commence par le symbole « (», la formule φ est forcément de la forme $(\psi \bowtie \theta)$ où ψ, θ sont deux formules et $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

- Comme α est un préfixe propre, on ne peut ni avoir α vide, ni avoir $\alpha = \varphi$.
- Si $\alpha = (\beta$ avec β préfixe de ψ, on a

$$|\alpha|_(= 1 + |\beta|_(\geqslant 1 + |\beta|_) = 1 + |\alpha|_) > |\alpha|_).$$

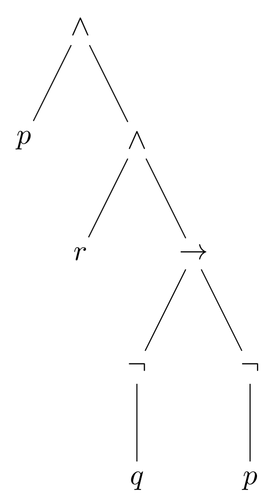
- Si $\alpha = (\psi \bowtie \gamma$ avec γ préfixe de θ, on a, par la question 1,

$$|\alpha|_(= 1 + |\psi|_(+ |\beta|_(\geqslant 1 + |\psi|_) + |\beta|_) = 1 + |\alpha|_) > |\alpha|_).$$

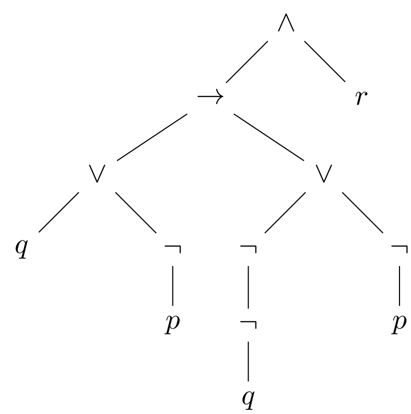
4. Soit φ. Par induction sur φ, on va montrer qu'aucun de ses préfixes propres α n'est une formule.
   - Si φ est une proposition atomique p, il n'y a pas de préfixe propre de φ.
   - Si φ est de la forme $\neg\psi$ où ψ est une formule,
     - si $\alpha = \neg$, alors ce n'est pas une formule.
     - si $\alpha = \neg\beta$ avec β préfixe propre de ψ, alors β n'est pas une formule (par hypothèse d'induction) et donc α non plus.
   - Si φ est de la forme $(\psi \bowtie \theta)$ où ψ, θ sont deux formules et $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, on utilise la question 3 afin d'avoir $|\alpha|_(> |\alpha|_($. Par contraposée de la question 1, α n'est pas une formule.
5. On montre par induction sur φ.
   - si $\varphi \in Prop$, alors il y a clairement unicité ;
   - si $\varphi = \neg\psi = \neg\theta$, alors $\psi = \theta$ et la propriété s'applique à ψ par hypothèse d'induction ;
   - si $\varphi = (\psi \bowtie \theta) = (\psi' \bowtie' \theta')$. On peut supposer sans perdre de généralité que ψ' est un préfixe de ψ, mais alors ψ' ne peut être un préfixe propre de ψ sinon on contredirait la question 4. On en conclut que $\psi' = \psi$, $\bowtie = \bowtie'$ et θ' est un préfixe de θ, puis on applique l'induction pour établir l'unicité.

Solution 1.2. Formules de la logique propositionnelle

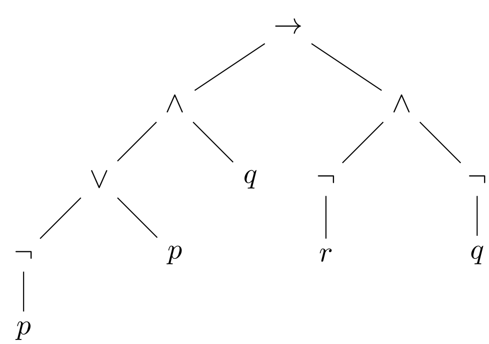
1. Ce n'est pas une formule car l'expression $(\wedge q)$ n'est pas une formule.
2. Ce n'est pas une formule au sens de la Définition 1.3 car $(\neg q)$ n'est pas une formule. Cependant grâce à la Section 1.1.4, on peut s'affranchir des parenthèses et on obtient bien une formule que l'on peut représenter de la manière suivante :



3. C'est bien une formule. Il faut faire attention à la priorité pour l'arbre de la formule.



4. Ce n'est pas une formule car on a collé $(q \vee p)$ et $\neg q$ sans connecteur logique entre les deux.
5. Ce n'est pas une formule de la logique propositionnelle car le symbole $\forall$ ne fait pas parti de cette logique.
6. Ce n'est pas une formule au sens de la Définition 1.3 car $(\neg p \vee p \wedge q)$ ne fait pas parti de la syntaxe des formules. Cependant, grâce à la Section 1.1.4, on peut enlever les parenthèses et on obtient la formule ci-dessous :

   Comme c'est un exercice syntaxique, il ne faut pas enlever le $\neg p \vee p$ dans l'arbre de la formule, car le fait que ce soit une validité est un argument sémantique.

Solution 1.3. Définitions par induction

On procède à chaque fois par induction sur la structure de la formule.

1. On note $occ_p(\varphi)$ le nombre d'occurrences de la variable propositionnelle p dans la formule φ.
   - Si $\varphi = p$, alors $occ_p(\varphi) = 1$.
   - Si $\varphi \in Prop \setminus \{p\}$, alors $occ_p(\varphi) = 0$.
   - Si $\varphi = \neg\psi$, alors $occ_p(\varphi) = occ_p(\psi)$.
   - Si $\varphi = \psi \bowtie \theta$ où $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, alors $occ_p(\varphi) = occ_p(\psi) + occ_p(\theta)$.
2. On note connect(φ) le nombre de connecteurs logiques de la formule φ.
   - Si $\varphi = p$, on a connect$(\varphi) = 0$.
   - Si $\varphi = \neg\psi$, alors connect$(\varphi) = 1 +$ connect(ψ).
   - Si $\varphi = \psi \bowtie \theta$ où $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, alors connect$(\varphi) = 1 +$ connect$(\psi) +$ connect(θ).
3. On note $h(\varphi)$ la hauteur de la formule φ.
   - Si $\varphi = p$, alors $h(\varphi) = 0$.
   - Si $\varphi = \neg\psi$, alors $h(\varphi) = 1 + h(\psi)$.
   - Si $\varphi = \psi \bowtie \theta$ où $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, alors $h(\varphi) = 1 + \max(h(\psi), h(\theta))$.

Solution 1.4. Sous-formules

1.
   - Si $\varphi = p$, on a $\text{SF}\textsc{st}(\varphi) = \emptyset = \text{SF}(p) \setminus \{p\}$, car $\text{SF}(p) = \{p\}$.
   - Si $\varphi = \neg\psi$, alors $\text{SF}\textsc{st}(\varphi) = \{\psi\} \cup \text{SF}\textsc{st}(\psi)$, or $\text{SF}(\varphi) = \{\neg\psi\} \cup \text{SF}(\psi)$, d'où $\text{SF}(\varphi) \setminus \{\varphi\} = \text{SF}(\psi) = \{\psi\} \cup \text{SF}\textsc{st}(\psi)$.
   - Si $\varphi = \psi \bowtie \theta$ où $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, on a $\{\psi, \theta\} \cup \text{SF}\textsc{st}(\psi) \cup \text{SF}\textsc{st}(\theta)$. Or $\text{SF}(\psi \bowtie \theta) \setminus \{(\psi \bowtie \theta)\} = \text{SF}(\psi) \cup \text{SF}(\theta) = \text{SF}\textsc{st}(\psi) \cup \{\psi\} \cup \text{SF}\textsc{st}(\theta) \cup \{\theta\}$.
2. Dans un arbre $\mathcal{A}$ représentant une formule φ, chaque sous-arbre de $\mathcal{A}$ correspond à une sous-formule de φ. En effet, on peut identifier le sous-arbre et la sous-formule dans les définitions inductives de l'arbre et de la formule.

Solution 1.5. Valuation et assignation

1. On procède par induction sur la formule φ.
   - Si $\varphi = p$, on a $\mu_\nu(p) = 1$ ssi $\nu(p) = \texttt{vrai}$ par définition de μ_ν.
   - Si $\varphi = \neg\psi$, on suppose le résultat connu pour ψ. On a alors $\nu(\varphi) = \texttt{vrai}$ ssi $\nu(\psi) = \texttt{faux}$ ssi $\mu_\nu(\psi) = 0$ ssi $1 - \mu_\nu(\psi) = 1$ ssi $\mu_\nu(\varphi) = 1$.
   - Si $\varphi = \psi \vee \theta$, on suppose le résultat connu pour ψ et θ. On a alors $\nu(\varphi) = \texttt{vrai}$ ssi $\nu(\psi) = \texttt{vrai}$ ou $\nu(\theta) = \texttt{vrai}$ ssi $\mu_\nu(\psi) = 1$ ou $\mu_\nu(\theta) = 1$ ssi au moins l'un des deux vaut 1 ssi $\max\{\mu_\nu(\psi), \mu_\nu(\theta)\} = 1$ ssi $\mu_\nu(\varphi) = 1$.
   - Si $\varphi = \psi \wedge \theta$, on suppose le résultat connu pour ψ et θ. On a alors $\nu(\varphi) = \texttt{vrai}$ ssi $\nu(\psi) = \texttt{vrai}$ et $\nu(\theta) = \texttt{vrai}$ ssi $\mu_\nu(\psi) = 1$ et $\mu_\nu(\theta) = 1$ ssi les deux valent 1 ssi $\mu_\nu(\psi)\mu_\nu(\theta) = 1$ ssi $\mu_\nu(\varphi) = 1$.

     On remarque que pour deux valeurs dans $\{0, 1\}$, prendre le minimum des valeurs et le produit revient au même, car si au moins une des valeurs est nulle, alors les deux quantités valent 0 et sinon elle valent 1.
   - Pour l'implication, il suffit d'appliquer la formule $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ et d'utiliser les points déjà prouvés.
2. Il suffit d'adapter la preuve précédente, cela est très similaire. On va par exemple faire le cas $\varphi = \neg\psi$ de l'induction. On a $\mu(\varphi) = 1$ ssi $1 - \mu(\psi) = 1$ ssi $\mu(\psi) = 0$ ssi $\nu_\mu(\psi) = \texttt{faux}$ ssi $\nu_\mu(\varphi) = \texttt{vrai}$.

Solution 1.6. Modèles d'une formule

1. Soit $Prop$ l'ensemble des variables propositionnelles.
   - Si $\varphi = p$, $Mod(\varphi) = \{\nu \mid \nu(p) = \texttt{vrai}\}$.
   - Si $\varphi = \neg\psi$, $Mod(\varphi) = Val_{Prop} \setminus Mod(\psi)$.
   - Si $\varphi = \psi \wedge \theta$, $Mod(\varphi) = Mod(\psi) \cap Mod(\theta)$.
   - Si $\varphi = \psi \vee \theta$, $Mod(\varphi) = Mod(\psi) \cup Mod(\theta)$.
   - Si $\varphi = \psi \rightarrow \theta$, $Mod(\varphi) = (Val \setminus Mod(\psi)) \cup Mod(\theta)$.

2. Posons $\varphi \stackrel{def}{=} (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$. On va faire une table de vérité de φ, il suffira de sélectionner uniquement les valuations rendant vraie la formule φ.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee \neg r$	φ	
`vrai`	`vrai`	`vrai`	`vrai`	`vrai`	`vrai`	$\leftarrow$
`vrai`	`vrai`	`faux`	`vrai`	`vrai`	`vrai`	$\leftarrow$
`vrai`	`faux`	`vrai`	`vrai`	`vrai`	`vrai`	$\leftarrow$
`vrai`	`faux`	`faux`	`vrai`	`vrai`	`vrai`	$\leftarrow$
`faux`	`vrai`	`vrai`	`vrai`	`faux`	`faux`	
`faux`	`vrai`	`faux`	`vrai`	`vrai`	`vrai`	$\leftarrow$
`faux`	`faux`	`vrai`	`faux`	`faux`	`faux`	
`faux`	`faux`	`faux`	`faux`	`vrai`	`faux`	

3. Dans un premier temps, on peut remarquer que $(p \to q) \vee (\neg p \to \neg q)$ est une tautologie, puisque $(p \to q) \vee (\neg p \to \neg q) \equiv (\neg p \vee q) \vee (p \vee \neg q) \equiv \neg p \vee p \vee q \vee \neg q \equiv \top$.
   Il suffit donc de trouver les modèles de $q \wedge r \to \neg p$; la seule valuation interdite est ν telle que $\nu(q) = \nu(r) = \nu(p) =$ `vrai` (cas mettant en défaut l'implication).
   En conclusion, $Mod(\varphi) = Val_{Prop} \setminus \{\nu\}$.
4. Toute valaution mettant p à `vrai` satisfait la formule, il y a 8 valuations de ce type puisque les trois variables propositionnelles q, r, s sont laissées libres. Si la variable propositionnelle p est mise à `faux`, alors il faut mettre à `vrai` la variable propositionnelle q et à `faux` la variable propositionnelle r. La variable propositionnelle s est laissée libre. Ainsi, il y a deux valuations de ce type

p	q	r	s
`faux`	`vrai`	`faux`	`vrai`

et

p	q	r	s
`faux`	`vrai`	`faux`	`faux`

Solution 1.7. Satisfaisabilité

1. Les formules $p \vee (q \to s)$ et $(p \to q) \wedge (q \to p)$ sont satisfaisables pour une valuation mettant p et q à `vrai` par exemple. Cependant elle ne sont pas valides car la valuation

p	q	s
`faux`	`vrai`	`faux`

ne satisfait pas la première formule et la valuation

p	q
`faux`	`vrai`

ne satisfait pas la deuxième formule.
   La formule $p \wedge (p \to q) \wedge (p \to \neg q)$ est insatisfaisable car il faut que p soit mise à `vrai`, or on ne peut pas avoir à la fois q et $\neg q$ à `vrai`.
2. « φ est satisfaisable » se traduit par « $Mod(\varphi) \neq \emptyset$ » car il suffit qu'il existe un modèle de φ pour qu'elle soit satisfaisable.

Solution 1.8. Validité

1. Par le Théorème 1.30, la formule $\neg(p \wedge (p \to q) \wedge (p \to \neg q))$ est valide. La formule $(p \to q) \;\vee (q \to p)$ est valide car si p est mise à `faux`, alors $p \to q$ est `vrai` et si q est mise à `faux`, alors $q \to p$ est `vrai` et le seul cas qu'il reste (p et q sont mises à `vrai`) rend `vrai` la formule, donc elle est valide. Pour les formules non valides mais satisfaisables, on peut reprendre les formules de l'exercice précédent.
2. « φ est valide » se traduit par « $Mod(\varphi) = Val_{Prop}$ » car il faut que toute valuation soit un modèle de φ.

Chapitre 2

Fragments syntaxiques

Solutions

Solution 2.1. Complétude fonctionnelle

On fait une récurrence sur n.
<u>Initialisation :</u> Pour $n = 1$, on a une seule variable propositionnelle p. On a 4 fonctions de $\{\texttt{faux}, \texttt{vrai}\}^1$ dans $\{\texttt{faux}, \texttt{vrai}\}$.

$$\begin{array}{llll} f_1 & \texttt{faux} \mapsto \texttt{faux} & f_2 : & \texttt{faux} \mapsto \texttt{faux} \\ & \texttt{vrai} \mapsto \texttt{faux} & & \texttt{vrai} \mapsto \texttt{vrai} \\ \\ f_3 & \texttt{faux} \mapsto \texttt{vrai} & f_4 : & \texttt{faux} \mapsto \texttt{vrai} \\ & \texttt{vrai} \mapsto \texttt{faux} & & \texttt{vrai} \mapsto \texttt{vrai} \end{array}$$

La fonction f_1 est représentée par la formule $\varphi_1 \stackrel{def}{=} p \wedge \neg p$.
La fonction f_2 est représentée par la formule $\varphi_2 \stackrel{def}{=} p$.
La fonction f_3 est représentée par la formule $\varphi_3 \stackrel{def}{=} \neg p$.
La fonction f_4 est représentée par la formule $\varphi_4 \stackrel{def}{=} p \vee \neg p$.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \geqslant 1$. On suppose que la propriété est vraie au rang n. Montrons la propriété au rang $n + 1$. Considérons $Prop = \{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ et une fonction $f : \{\texttt{faux}, \texttt{vrai}\}^{n+1} \to \{\texttt{faux}, \texttt{vrai}\}$. On peut voir chaque valuation sur $\{p_1, \ldots, p_n\}$ comme une restriction d'une valuation sur $\{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$. On représente ces deux restrictions par $f_0 = f_{|\nu(p_{n+1})=0}$ et $f_1 = f_{|\nu(p_{n+1})=1}$. Les fonctions f_0 et f_1 sont donc définies sur l'ensemble des valuations sur $\{p_1, \ldots, p_n\}$, ainsi par hypothèse de récurrence, on a deux formules $\varphi_0(p_1, \ldots, p_n)$ et $\varphi_1(p_1, \ldots, p_n)$. On représente donc la fonction f par la formule

$$(\neg p_{n+1} \wedge \varphi_0(p_1, \ldots, p_n)) \vee (p_{n+1} \wedge \varphi_1(p_1, \ldots, p_n))$$

Ce qui prouve l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.
<u>Conclusion :</u> Ainsi, pour tout ensemble $Prop = \{p_1, \ldots, p_n\}$ fini, toute fonction f allant des valuations sur $Prop$ dans $\{\texttt{faux}, \texttt{vrai}\}$ est représentable par une formule φ sur $Prop$.

Solution 2.2. Système complet

Comme le système de connecteurs $\{\neg, \wedge\}$ est complet, il suffit de simuler ces connecteurs avec le système $\{\neg, \vee\}$ pour démontrer que $\{\neg, \vee\}$ est un système de connecteurs logiques complet. Pour le connecteur « $\neg$ », il est déjà présent dans $\{\neg, \vee\}$ donc il n'y a rien à faire. Pour le connecteur « $\wedge$ », il suffit d'utiliser les lois de De Morgan afin d'avoir

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

Donc le système $\{\neg, \vee\}$ est complet. On aurait pu aussi faire une preuve directement par induction en simulant tous les connecteurs logiques des formules de logique propositionnelle.

Solution 2.3. Mise en forme normale conjonctive

On utilise l'algorithme en 3 étapes de la Section 2.2.2.

1. $(p \to q) \to r$

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow (\neg p \vee q) \to r \\
&\rightsquigarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \\
&\rightsquigarrow (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee r \\
&\rightsquigarrow (p \wedge \neg q) \vee r \\
&\rightsquigarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)
\end{aligned}$$

2. $(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \to p)$

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee p) \\
&\rightsquigarrow (\neg p \vee \neg r \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)
\end{aligned}$$

Solution 2.4. Algorithme de mise en forme normale conjonctive

1. Montrons la terminaison en exhibant des variants pour chaque étape. L'étape 1 termine car le nombre de symboles $\to$ diminue strictement. Pour l'étape 2, on définit une quantité qui est la somme des hauteurs des symboles $\neg$ dans la formule. Cette somme diminue strictement. Pour l'étape 3, on définit la somme des hauteurs des symboles $\wedge$ dans la formule. Cette somme croît strictement mais est bornée par la hauteur de la formule.
2. Il suffit de remarquer que l'on remplace chaque sous-formule par une sous-formule équivalente.

Solution 2.5. Forme normale conjonctive qui explose

Remarquons que $\nu \models \varphi$ ssi il existe $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $\nu(x_i) = \texttt{vrai} = \nu(y_i)$. Soit $\psi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$ une formule en FNC équivalente à φ. Soit $S \subseteq [\![1;n]\!]$. On pose la valuation ν_S telle que, pour tout $i \in S$, $\nu_S(x_i) = \texttt{vrai}$ et $\nu_S(y_i) = \texttt{faux}$ et pour tout $i \in [\![1;n]\!] \setminus S$, $\nu_S(x_i) = \texttt{faux}$ et $\nu_S(y_i) = \texttt{vrai}$. Par la remarque initiale, on a $\nu_S \not\models \varphi$. D'où $\nu_S \not\models \psi$, il existe $j \in [\![1;m]\!]$ tel que la clause C_j n'est pas satisfaite par ν_S (*i.e.* $\nu_S \not\models C_j$). On pose alors la fonction suivante

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} 2^{[\![1;n]\!]} & \to & [\![1;m]\!] \\ S & \mapsto & \min\{1 \leqslant j \leqslant m \mid \nu_S \not\models C_j\} \end{array} \right.$$

Montrons que la fonction J est injective. Soient $E, F \subseteq [\![1;n]\!]$ tels que $E \neq F$ et $J(E) = J(F)$. On note $j \in [\![1;m]\!]$ la valeur $J(E)$. Sans perte de généralité, il existe $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $i \in E \setminus F$ Par définition de ν_E et

ν_F, on a $\nu_E(x_i) = \texttt{vrai}$ et $\nu_F(y_i) = \texttt{vrai}$. Cependant $\nu_E \not\models C_j$ et $\nu_F \not\models C_j$. Or forcément il y a x_i ou y_i dans la clause C_j sinon les formules φ et ψ ne seraient pas équivalentes. En effet, s'il n'y a ni x_i ni y_i dans la clause C_j, alors on pourrait poser la valuation $\widetilde{\nu}$ telle que $\widetilde{\nu}(x_i) = \widetilde{\nu}(y_i) = \texttt{vrai}$ et $\widetilde{\nu}(C_j) = \texttt{faux}$ car C_j n'est pas une validité, dans ce cas, on aurait alors $\widetilde{\nu} \models \varphi$ et $\widetilde{\nu} \not\models \psi$. Donc comme il y a soit x_i soit y_i dans C_j, on a soit $\nu_E \models C_j$ soit $\nu_F \models C_j$. Ce qui est une contradiction, d'où J est injective. Ainsi, $m \geqslant 2^n$, ce qui conclut la preuve.

Solution 2.6. Parité

La fonction f_n vaut 0 s'il y a un nombre pair d'argument à 1 et 1 s'il y a un nombre impair d'argument à 1. Une formule φ_n représentant f_n est telle que pour toute valuation, mettant à `vrai` un nombre impair de variables propositionnelles, va satisfaire φ_n et toute valuation, mettant à `vrai` un nombre pair de variables propositionnelles, va rendre `faux` la formule φ_n. Il faut faire le lien entre 0 et `faux` et le lien entre 1 et `vrai` comme à l'Exercice 1.5.

1. On définit φ_n par induction sur $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1) &= x_1 \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n) &= \Big(\varphi_{\lfloor n/2\rfloor}(x_1, \dots, x_{\lfloor n/2\rfloor}) \wedge \neg\varphi_{\lceil n/2\rceil}(x_{\lceil n/2\rceil}, \dots, x_n)\Big) \\ &\qquad \vee \Big(\neg\varphi_{\lfloor n/2\rfloor}(x_1, \dots x_{\lfloor n/2\rfloor}) \wedge \varphi_{\lceil n/2\rceil}(x_{\lceil n/2\rceil}, \dots, x_n)\Big)\end{aligned}$$

   Par exemple, on a $\varphi_2(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1) \wedge \neg\varphi_1(x_2)) \vee (\neg\varphi_1(x_1) \wedge \varphi_1(x_2)) = (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$ qui correspond bien à vouloir une variable à `vrai` et une variable à `faux` afin qu'il y est un nombre impair de variables propositionnelles à `vrai`. Pour le cas $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_3(x_1, x_2, x_3) &= (\varphi_1(x_1) \wedge \neg\varphi_2(x_2, x_3)) \vee (\neg\varphi_1(x_1) \wedge \varphi_2(x_2, x_3)) \\ &= (x_1 \wedge \neg\varphi_2(x_2, x_3)) \vee (\neg x_1 \wedge \varphi_2(x_2, x_3))\end{aligned}$$

   Ainsi, soit x_1 est mise à `vrai` et il faut un nombre pair de variables mises à `vrai` dans les variables x_2 et x_3, soit x_1 est mise à `faux` et il faut un nombre impair de variables mises à `vrai` dans les variables x_2 et x_3.
   La taille $T(n)$ de φ_n vérifie $T(n) \leq 4T(\lceil n/2\rceil) + O(1)$, d'où $T(n) = O(n^2)$ par le Master Theorem (ou Théorème fondamental de la complexité).

2. Soit φ_n une formule en forme normale disjonctive représentant f_n. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, par l'absurde, supposons qu'il existe C une clause conjonctive de φ_n ne contenant pas ni x_i ni $\neg x_i$. Une valuation ν rendant cette clause vraie la rendrait aussi vraie en changeant la valeur de x_i. Or, rendre une clause de φ_n vraie rend φ_n vraie elle-même. Ainsi, φ_n reste vraie pour la valuation ν et $\nu[x_i \mapsto \neg x_i]$, ce qui contredit le fait qu'elle représente f_n. Ainsi, toute clause conjonctive de φ_n contient soit x_i soit $\neg x_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, chaque clause n'est donc vraie que pour une seule valuation. Or, une valuation rend φ_n vraie si et seulement si elle rend l'une de ses clauses vraies. Ainsi, l'ensemble des clauses de φ_n est en bijection avec l'ensemble des valuations rendant φ_n vraie. Or, cet ensemble est de taille $\frac{2^n}{2}$, et chaque clause est de taille supérieure à n, donc la taille de φ_n est supérieure ou égale à $n2^{n-1}$.

Solution 2.7. Transformation de Tseitin

On veut donner la transformation de Tseitin de la formule $p \to (q \wedge r)$. On utilise le Théorème 2.37. On pose

$$\varphi \stackrel{def}{=} \neg p \vee (q \wedge r)$$

qui est équivalente à la formule de départ. La transformation de Tseitin de φ est alors

$$T(\varphi) \stackrel{def}{=} a_{\neg p\vee(q\wedge r)} \wedge t(\neg p) \wedge t(\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge t(q \wedge r)$$

Il suffit maintenant d'intégrer les expressions de t afin d'obtenir la formule suivante

$$\begin{aligned}
T(\varphi) = a_{\neg p \vee (q \wedge r)} \\
&\wedge (\neg a_{\neg p} \vee \neg a_p) \wedge (a_p \vee a_{\neg p}) \\
&\wedge (\neg a_{\neg p \vee (q \wedge r)} \vee a_{\neg p} \vee a_{q \wedge r}) \wedge (\neg a_{\neg p} \vee a_{\neg p \vee (q \wedge r)}) \wedge (\neg a_{q \wedge r} \vee a_{\neg p \vee (q \wedge r)}) \\
&\wedge (\neg a_{q \wedge r} \vee a_q) \wedge (\neg a_{q \wedge r} \vee a_r) \wedge (\neg a_q \vee \neg a_r \vee a_{q \wedge r})
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Problème SAT

Solutions

Solution 3.1. Qui a commis le meurtre ?

On définit, pour $i \in \{A, B, C\}$,

- la variable propositionnelle c_i qui signifie que le suspect i est coupable.
- la variable propositionnelle k_i qui signifie que le suspect i connaissait la victime.
- la variable propositionnelle h_i qui signifie que le suspect i détestait la victime.
- la variable propositionnelle v_i qui signifie que le suspect i était en ville durant le meurtre.

On pose les déclarations de chacun :

- Pour Adams $d_A = \neg c_A \wedge k_B \wedge h_C$ (remarquer qu'on peut enlever h_C)
- Pour Brown $d_B = \neg c_B \wedge \neg k_B \wedge \neg v_B$
- Pour Clarke $d_C = \neg c_C \wedge k_A \wedge v_A \wedge k_B \wedge v_B \wedge (c_A \vee c_B)$ (remarquer qu'on peut enlever k_A et v_A)

On ajoute de plus

- Au moins un des trois est coupable : $c_A \vee c_B \vee c_C$.
- Au plus un des trois est coupable : $\neg(c_A \wedge c_B) \wedge \neg(c_A \wedge c_C) \wedge \neg(c_B \wedge c_C)$.
- les deux innocents disent la vérité, mais pas nécessairement le coupable : $(\neg c_A \to d_A) \wedge (\neg c_B \to d_B) \wedge (\neg c_C \to d_C)$

Pour résoudre ce problème, on peut utiliser un SAT Solver (comme TouIST par exemple)
Une solution possible est $k_B, h_C, d_A, c_B, v_B, d_C$. Y en a-t-il d'autres ? On ajoute $\neg c_B$, et la réponse du SAT Solver sera « La formule n'est pas satisfaisable ! ». C'est donc bien Brown le coupable.

Solution 3.2. Sudoku

On peut poser les variables propositionnelles $p_{i,j,\ell}$ pour $i, j, \ell \in [\![1; n^2]\!]$. Le sens qu'on donne à ces variables propositionnelles est le suivant : si la variable $p_{i,j,\ell}$ est mise à `vrai`, cela encode le fait que l'entier ℓ se trouve dans la case de coordonnées (i, j).
On traduit ensuite les contraintes :

- Contrainte de la ligne i :

$$\bigwedge_{j=1}^{n^2} \bigvee_{\ell=1}^{n^2} \left(p_{i,j,\ell} \wedge \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k\neq\ell}}^{n^2} \neg p_{i,j,k} \right)$$

  Autrement dit, pour toute case (i, j) de la ligne i, il existe un entier ℓ entre 1 et n^2 qui est dans la case et tel que pour tous les autres entiers k, l'entier k n'est pas dans la case (i, j).

- Contrainte de la colonne j :

$$\bigwedge_{i=1}^{n^2} \bigvee_{\ell=1}^{n^2} \left(p_{i,j,\ell} \wedge \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k\neq\ell}}^{n^2} \neg p_{i,j,k} \right)$$

  Même chose qu'avant.

- Contrainte du carré $\mathcal{C}_{M,N}$ (pour $M, N \in [\![0; n-1]\!]$) :

$$\bigwedge_{(i,j)\in\mathcal{C}_{M,N}} \bigvee_{\ell=1}^{n^2} \left(p_{i,j,\ell} \wedge \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k\neq\ell}}^{n^2} \neg p_{i,j,k} \right)$$

  Même chose qu'avant.

- Pour une instance de sudoku I, on note E_I l'ensemble des contrainte de case pré-remplie :

$$\bigwedge_{(i,j,\ell)\in E_I} p_{i,j,\ell}$$

Pour une instante de sudoku I, on note φ_I la transformation en FNC de la conjonction des formules ci-dessus, grâce à l'algorithme de mise en forme normale conjonctive du chapitre précédent.
Soit une solution S de I. On prend la valuation ν_S telle que $\nu_S(p_{i,j,\ell}) = \texttt{vrai}$ si et seulement si la case (i, j) de la solution S contient l'entier ℓ. Comme la solution S satisfait les contraintes, alors les formules sont rendues vraies par la valuation ν_S.
Réciproquement, soit ν une valuation satisfaisant la formule φ_I. Comme ν satisfait toutes les contraintes des lignes par exemple, on sait que pour chaque case (i, j) il existe un unique entier ℓ tel que $\nu(p_{i,j,\ell}) = \texttt{vrai}$. On construit alors la solution S_ν telle que la case (i, j) de S_ν contient ℓ si et seulement si $\nu(p_{i,j,\ell}) = \texttt{vrai}$. La solution S_ν ainsi construite satisfait les contraintes du sudoku.

Solution 3.3. Problème HORNSAT

1. L'entrée est bien un ensemble de clauses de Horn car on les réécrire sous la forme

$$\{\neg x \vee \neg z \vee w, \quad \neg x \vee y, \quad x, \quad \neg x \vee \neg y \vee w, \quad \neg w \vee \neg x \vee \neg y\}.$$

   Mais l'écriture avec les implications sera plus commode pour utiliser l'algorithme.
   On met les étapes de l'algorithme **Horn-SAT-Glouton** (page 73)

Clause à traiter	x	y	z	w
(Initialisation)	`faux`	`faux`	`faux`	`faux`
$\top \to x$	`vrai`	`faux`	`faux`	`faux`
$x \to y$	`vrai`	`vrai`	`faux`	`faux`
$(x \wedge y) \to w$	`vrai`	`vrai`	`faux`	`vrai`

On peut sortir de la boucle **tant que** car toutes les clauses de Horn qui ne sont pas des clauses négatives pures sont mises à `vrai`. En effet, la seule telle clause que l'on n'a pas traité est $(x \wedge z) \to w$ et celle-ci est bien `vrai` car z est mise à `faux`. À la fin de cette boucle **tant que**, on obtient la valuation

x	y	z	w
`vrai`	`vrai`	`faux`	`vrai`

qui ne satisfait pas la clause négative pure $\neg w \vee \neg x \vee \neg y$.

2. L'ensemble $\{(x \wedge z) \to w, x \to y, \top \to x, (x \wedge y) \to w, (w \wedge x \wedge z) \ \to \bot\}$ peut s'écrire

$$\{\neg x \vee \neg z \vee w, \quad \neg x \vee y, \quad x, \quad \neg x \vee \neg y \vee w, \quad \neg w \vee \neg x \vee \neg z\}.$$

On met les étapes de l'algorithme**Horn-SAT-Glouton** (page 73)

Clause à traiter	x	y	z	w
(Initialisation)	`faux`	`faux`	`faux`	`faux`
$\top \to x$	`vrai`	`faux`	`faux`	`faux`
$x \to y$	`vrai`	`vrai`	`faux`	`faux`
$(x \wedge y) \to w$	`vrai`	`vrai`	`faux`	`vrai`

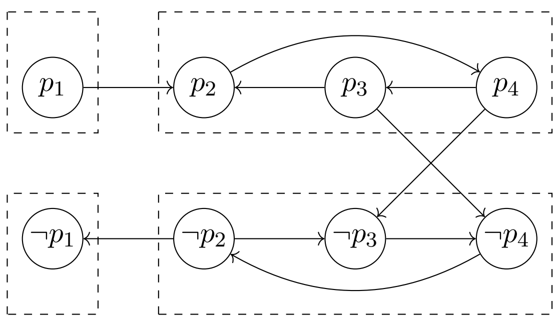
Pour les mêmes raisons, la boucle **tant que** se termine, mais cette fois si la clause $\neg w \vee \neg x \vee \neg z$ est satisfaite par la valuation

x	y	z	w
`vrai`	`vrai`	`faux`	`vrai`

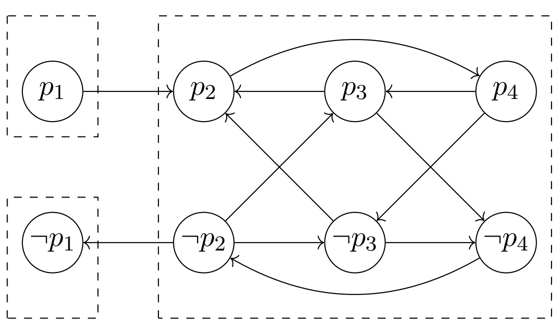
.

Solution 3.4. Problème 2SAT

1. Le graphe d'implication de la formule $(p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_4 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_3)$ est le suivant :



2. Le graphe d'implication de la formule $(p_3 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_4 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_3) \wedge (p_3 \vee p_2)$ est le suivant :



3. On utilise la Proposition 3.10. On a entouré en pointillé les composantes fortement connexes des deux graphes d'implication. Il faut ensuite vérifier qu'aucune variable propositionnelle p ne se trouve avec sa négation $\neg p$ dans une composante fortement connexe, pour avoir la satisfaisabilité de la formule. On remarque donc que la première formule est satisfaisable et la deuxième est insatisfaisable.

Solution 3.5. Problème de 3-coloration

1. Ce problème est bien dans NP car on peut vérifier en temps polynomial (en le nombre d'arêtes du graphe) qu'une coloration d'un graphe vérifie bien les propriétés voulues.
2. Le graphe G_0 possède $3 + 2n$ sommets où n est le nombre de variables propositionnelles et chaque gadgetintroduit 5 nouveaux sommets. Donc le graphe G possède $3 + 2n + 5m$ sommets. De plus, un graphe avec N sommets possède au plus $N(N-1)/2$. La taille du graphe est donc au plus quadratique en la taille de φ.
3. Commençons par deux remarques :
   - on peut compléter toute coloration partielle d'un gadget G_C où les sommets α_C, β_C et γ_C sont de la couleur de f ou v et où l'un d'eux est de la couleur de v en une coloration licite de G_C. Il suffit de tester les 7 cas possibles.
   - Dans toute coloration d'un gadget de la forme G_C, l'un des sommets α_C, β_C ou γ_C a la couleur de v. Par l'absurde, supposons que α_C, β_C et γ_C ont tous la couleur de f (on rappelle qu'ils ont soit la couleur de v, soit celle de f). Comme α_C et β_C ont la couleur de f, les sommets x_C et y_C ont les couleurs de r ou v et leur couleur est différente car ils sont liés par une arête. z_C a donc nécessairement la couleur de f. De même, comme z_C et γ_C ont la couleur de f, on en déduit que v a la couleur de f. Contradiction.

   Montrons que si φ est satisfaisable, alors G est 3 coloriable. Soit ν une valuation qui satisfait φ, $\nu \models \varphi$. On fixe des couleurs différentes pour les sommets v, f et r de G, $c(v)$, $c(f)$ et $c(r)$, et on colorie les sommets associés aux variables propositionnelles de φ de la façon suivante : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $c(p_i) = \begin{cases} c(v) & \text{si } \nu(p_i) = 1 \\ c(f) & \text{sinon} \end{cases}$ et $c(\neg p_i) = \begin{cases} c(v) & \text{si } \nu(p_i) = 0 \\ c(f) & \text{sinon} \end{cases}$.
   Comme $\nu \models \varphi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$, on a $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ $\nu \models C_j = (\alpha_{C_j} \vee \beta_{C_j} \vee \gamma_{C_j})$, donc dans chacun des gadgets G_C, l'un des sommets α_C, β_C ou γ_C est de la couleur de v. Donc d'après le lemme 1, on peut compléter les colorations partielles des G_C en une coloration de G. Donc G est $3-$coloriable.

   Réciproquement, montrons que si G est 3-coloriable, alors φ est satisfaisable. Soit c une $3-$coloration de G. On définit une valuation ν par :
   pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\nu(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } c(p_i) = c(v) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   D'après la deuxième remarque, dans chaque gadget G_C, l'un des sommets α_C, β_C ou γ_C a la couleur de v, donc pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ $\nu \models C_j$, donc $\nu \models \varphi$. La formule φ est satisfaisable.
4. A partir d'une formule φ en FNC avec uniquement des 3 clauses, on a construit un graphe G de taille polynomiale en la taille de φ qui vérifie G est 3 coloriable si et seulement si φ est satisfaisable. Comme 3SAT est NP-difficile, alors 3COL est NP-difficile. Donc le problème 3COL est NP-complet.

Chapitre 4

Problème VALIDE

Solutions

Solution 4.1.

1. La forme clausale de $\neg(p \to p) \equiv \neg(\neg p \lor p) \equiv p \land \neg p$ est $\{p, \neg p\}$.
   Résolution :
   $$\frac{p \quad \neg p}{\bot}$$
   Donc $\vdash p \to p$ et par correction de la résolution, on a $\models p \to p$.
2. La forme clausale de $\neg[((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)]$ est $\{\neg p \lor q, \neg q \lor r, p, \neg r\}$.
   Résolution :
   $$\dfrac{\dfrac{\neg p \lor q \quad p}{q} \qquad \dfrac{\neg q \lor r \quad \neg r}{\neg q}}{\bot}$$
3. La forme clausale de la négation est $\{\neg s \lor r, p, \neg r, r \lor s \lor \neg p\}$. Résolution :
   $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \quad r \lor s \lor \neg p}{r \lor s} \quad \neg r}{s} \quad \neg s \lor r}{r} \quad \neg r}{\bot}$$
4. La forme clausale de la négation est $\{p \lor r, p \lor q, q \lor r, q, \neg p, \neg r\}$.
   Résolution :
   $$\dfrac{\dfrac{p \lor r \quad \neg p}{r} \quad \neg r}{\bot}$$
5. Soit $\Gamma = \{q \to (\neg q \lor r), q \to (p \land \neg r)\}$ et $\varphi = q \to r$. La forme clausale de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est $\{\neg q \lor r, \neg q \lor p, \neg q \lor \neg r, q, \neg r\}$.
   Résolution :
   $$\dfrac{\dfrac{\neg q \lor r \quad \neg r}{\neg q} \quad q}{\bot}$$

6. La forme clausale de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est $\Delta = \{\neg q \vee r, \neg q \vee p, \neg q \vee \neg r\}$.
   Résolution :
$$\dfrac{\dfrac{\neg q \vee r \quad \neg r \vee \neg q}{\neg q \vee \neg q}}{\neg q}$$
   C'est la seule coupure possible, il est donc impossible de prouver $\perp$. On en déduit $\{q \to (\neg q \vee r), q \to (p \wedge \neg r)\} \not\models q \wedge r$. En effet, en prenant une valuation ν telle que $\nu(q) = \texttt{faux}$, on a $\nu(q \to (\neg q \vee r)) = \nu(q \to (p \wedge \neg r)) = \texttt{vrai}$ alors que $\nu(q \wedge r) = \texttt{faux}$, ce qui confirme que la formule $q \wedge r$ n'est pas conséquence logique des formules de départ.
7. La forme normale de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ est
$$\Delta = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p \vee \neg r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, p \vee q \vee r\}.$$
   Résolution :
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p \vee q \quad p \vee \neg r}{q \vee \neg r} \quad \neg p \vee \neg q \vee \neg r}{\neg p \vee \neg r \vee \neg r}}{\neg p \vee \neg r} \quad p \vee \neg r}{\neg r} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p \vee q \quad p \vee q \vee r}{q \vee q \vee r}}{q \vee r} \quad \neg q \vee r}{r \vee r}}{r}}{\perp}$$
   Donc $\Gamma \vdash \varphi$ et par correction $\Gamma \models \varphi$.

Solution 4.2. On associe à chaque fait une variable propositionnelle :

e	:	« est écossais »
c	:	« porte des chaussettes rouges »
k	:	« porte un kilt »
m	:	« est marié »
d	:	« sort le dimanche »

On exprime ensuite chaque règle avec une formule logique propositionnelle.

(R_1) $\neg e \to c$

(R_2) $c \to k$

(R_3) $m \to \neg d$

(R_4) $d \leftrightarrow e$

(R_5) $k \to (e \wedge m)$

(R_6) $e \to k$

Chaque règle correspond ainsi à une ou plusieurs clauses.

(R_1) $e \vee c$

(R_2) $\neg c \vee k$

(R_3) $\neg m \vee \neg d$

(R_4) $\neg d \vee e, \quad d \vee \neg e$

(R_5) $\neg k \vee e, \quad \neg k \vee m$

(R_6) $\neg e \vee k$

On peut alors déduire la clause vide :
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg e \vee k \quad \neg k \vee m}{\neg e \vee m} \quad \neg m \vee \neg d}{\neg e \vee \neg d} \quad d \vee \neg e}{\neg e} \quad \dfrac{\dfrac{e \vee c \quad \neg c \vee k}{e \vee k} \quad \neg k \vee e}{e}}{\perp}$$

Solution 4.3.

1.

1	$(p \to q) \to p, \neg p, p, \neg q \vdash p$	ax
2	$(p \to q) \to p, \neg p, p, \neg q \vdash \neg p$	ax
3	$(p \to q) \to p, \neg p, p, \neg q \vdash \bot$	elim $\neg$ $1, 2$
4	$(p \to q) \to p, \neg p, p \vdash q$	absurde 3
5	$(p \to q) \to p, \neg p \vdash p \to q$	intro $\to 4$
6	$(p \to q) \to p, \neg p \vdash (p \to q) \to p$	ax
7	$(p \to q) \to p, \neg p \vdash p$	elim $\to 5, 6$
8	$(p \to q) \to p, \neg p \vdash \neg p$	ax
9	$(p \to q) \to p, \neg p \vdash \bot$	elim $\neg$ $7, 8$
10	$(p \to q) \to p \vdash p$	absurde 9
11	$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$	intro $\to 10$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\,\text{ax}}{p \vdash q, p}\,\text{aff}_d}{\vdash p \to q, p}\,\to_d \qquad \dfrac{}{p \vdash p}\,\text{ax}}{(p \to q) \to p \vdash p}\,\to_g}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\,\to_d$$

Chapitre 5

Compacité

Solutions

Solution 5.1. Démonstration topologique du théorème de compacité

1. Soit une formule φ. On veut montrer que $Val \setminus Mod(\varphi)$ est un ouvert. L'argument clé est que seul un ensemble $Prop(\varphi)$ fini de variables propositionnelles apparaît dans φ ; sans perdre de généralité, quitte à changer l'ordre de $Prop$, on peut supposer que cet ensemble est de la forme $Prop(\varphi) \stackrel{def}{=} \{p_1, \ldots, p_m\}$. De ce fait, $Val \setminus Mod(\varphi)$ est une union d'ouverts de la forme
$$\bigcup_{\nu \in Val \setminus Mod(\varphi)} \{\nu(p_1)\} \times \ldots \times \{\nu(p_m)\} \times \Pi_{i>m}\{\texttt{faux}, \texttt{vrai}\},$$
qui est donc ouvert. Son complémentaire $Mod(\varphi)$ est donc fermé.
2. Soit Γ un ensemble de formules. Alors $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$ et comme Γ est insatisfaisable, on a $\bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi) = \emptyset$. Or chaque $Mod(\varphi)$ étant un fermé de ν d'après la question précédente, par compacité de l'espace Val, il existe un sous-ensemble fini Γ_0 de Γ tel que $\bigcap_{\varphi \in \Gamma_0} Mod(\varphi) = \emptyset$, c'est-à-dire $Mod(\Gamma_0) = \emptyset$. Donc on a trouvé un sous-ensemble fini de formules qui est insatisfaisable.

Solution 5.2. Pavage de Wang

1. On veut vérifier que chaque case contient une et une seule tuile, pour cela on pose pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ la formule
$$\varphi_{i,j} \stackrel{def}{=} \bigvee_{t \in \mathcal{T}} \left(p_{i,j,t} \wedge \bigwedge_{t' \in \mathcal{T} \setminus \{t\}} \neg p_{i,j,t'} \right).$$
De plus, il faut que les couleurs de tuiles adjacentes correspondent. Pour cela, il suffit de vérifier que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, la couleur au nord de la tuile correspond à la couleur au sud de la tuile du dessus et la couleur à l'est correspond à la couleur à l'ouest de la tuile de droite. On pose alors pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ la formule
$$\psi_{i,j} \stackrel{def}{=} \bigvee_{\substack{t,t',t'' \in \mathcal{T}, \\ t_e = t'_o, t_n = t''_s}} p_{i,j,t} \wedge p_{i,j+1,t'} \wedge p_{i+1,j,t''}$$

et l'ensemble d'axiomes $\texttt{Ax} \stackrel{def}{=} \underbrace{\{\varphi_{i,j} \mid (i,j) \in \mathbb{N}^2\}}_{\texttt{Ax}_1} \cup \underbrace{\{\psi_{i,j} \mid (i,j) \in \mathbb{N}^2\}}_{\texttt{Ax}_2}$ convient.

2. L'implication directe est triviale, montrons donc la réciproque. Supposons donc que tout carré fini est pavable. Pour ne paver qu'un carré $[\![1;n]\!]$, il suffit de restreindre l'ensemble d'axiomes à $\texttt{Ax}^{(n)} = \texttt{Ax}_1^{(n)} \cup \texttt{Ax}_2^{(n)}$ avec :

$$\texttt{Ax}_1^{(n)} \stackrel{def}{=} \{\varphi_{i,j} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$$

$$\texttt{Ax}_2^{(n)} \stackrel{def}{=} \{\psi_{i,j} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n-1\}$$

On remarque que $\texttt{Ax} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\texttt{Ax}^{(n)}$. Le théorème de compacité nous dit que si toute partie finie de $\texttt{Ax}$ est satisfaisable, alors $\texttt{Ax}$ est satisfaisable. Or, toute partie finie de $\texttt{Ax}$ est contenue dans l'un de ces $\texttt{Ax}^{(n)}$. Ainsi, si tous les $\texttt{Ax}^{(n)}$ sont satisfaisables, alors $\texttt{Ax}$ l'est aussi, *i.e.* si tout carré est pavable le quart de plan est pavable, ce qui conclut la démonstration.

Solution 5.3. Groupes abéliens totalement ordonnés

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que le groupe abélien $(G, *, e, \leqslant)$ est totalement ordonné. On veut montrer qu'il est sans torsion.
Soit $x \in G$ tel que $x^n = e$. Comme l'ordre est total, on sait que l'on a $x \leqslant e$ ou $e \leqslant x$.
Si $e \leqslant x$, par compatibilité avec la loi $*$, on a $x \leqslant x^2$, puis $x^2 \leqslant x^3$, etc. jusqu'à $x^{n-1} \leqslant x^n = e$. Donc

$$e \leqslant x \leqslant x^2 \leqslant \cdots \leqslant x^n = e.$$

Par antisymétrie, on a $x = e$.
Si $x \leqslant e$, de la même façon, on obtient

$$e = x^n \leqslant x^{n-1} \leqslant \cdots \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant e.$$

Ainsi, le groupe G est bien sans torsion.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que le groupe abélien $(G, *, e)$ est sans torsion. On veut montrer qu'il est totalement ordonné. Il faut donc définir cet ordre. Pour tous $x, y \in G$, on crée la variable propositionnelle p_{xy}. Une valuation rendant p_{xy} vraie signifiera que l'on a $x \leqslant y$.
Pour tout sous-groupe H de G, on pose les ensembles de formules suivants :

- $Reflexiv_H \stackrel{def}{=} \{p_{xx} \,|\, x \in H\}$,
- $Antisym_H \stackrel{def}{=} \{\neg(p_{xy} \wedge p_{yx}) \,|\, x, y \in H$ et $x \neq y\}$,
- $Transitiv_H \stackrel{def}{=} \{(p_{xy} \wedge p_{yz}) \to p_{xz} \,|\, x, y, z \in H\}$,
- $Compatib_H \stackrel{def}{=} \{p_{xy} \to p_{(xz)(yz)} \,|\, x, y, z \in H\}$,
- $\mathcal{T}_H \stackrel{def}{=} Reflexiv_H \cup Antisym_H \cup Transitiv_H \cup Compatib_H$.

Si $\mathcal{T}_G$ est satisfaisable, une valuation modèle de $\mathcal{T}_G$ donne un ordre total sur G.
On veut donc montrer que $\mathcal{T}_G$ est satisfaisable. Pour cela, grâce au théorème de compacité, il suffit de montrer que tout sous-ensemble fini $\mathcal{T}_{fini}$ de $\mathcal{T}_G$ est satisfaisable.
Soit $\mathcal{T}_{fini}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{T}_G$. Soit $x_1, \ldots, x_N$ l'ensemble des éléments de G apparaissant dans les formules de $\mathcal{T}_{fini}$. On considère le sous-groupe H de G engendré par $x_1, \ldots, x_N$. On a donc $\mathcal{T}_{fini} \subseteq \mathcal{T}_H$.
Comme H est abélien, sans torsion et de type fini, par le théorème de structure des groupes abéliens, on a H isomorphe à $\mathbb{Z}^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Or $\mathbb{Z}^m$ est totalement ordonné par l'ordre lexicographique, donc H l'est.
Ainsi, $\mathcal{T}_H$ est satisfaisable, donc $\mathcal{T}_{fini}$ l'est aussi. Ce qui conclut la preuve.

Solution 5.4. Tout ordre partiel peut être étendu en un ordre total

1. Soit E un ensemble fini, muni d'un ordre partiel $<$. Montrons qu'il existe un ordre total $\prec$ qui étend $<$, *i.e.* pour tout élément $e, e' \in E$, si $e < e'$ alors $e \prec e'$. On le montre par récurrence sur le cardinal de E. Autrement dit, on pose la propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dit que pour tout ensemble E de cardinal n muni d'un ordre partiel $<$, l'ordre partiel $<$ peut s'étendre en un ordre total $\prec$.

   - $\mathcal{P}(0)$ est clairement vraie.
   - Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit E un ensemble de cardinal $n+1$ muni d'un ordre partiel $<$. Soit e un élément maximal de E pour $<$, *i.e.* un élément e tel qu'il n'existe pas d'éléments e' dans E avec $e < e'$. Un tel e existe car E est fini. Maintenant, $E \setminus \{e\}$ est de cardinal n, et la restriction de $<$ à $E \setminus \{e\}$ est un ordre partiel sur $E \setminus \{e\}$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $<$ s'étend en un ordre total $\prec$ sur $E \setminus \{e\}$. On étend $\prec$ à E, en posant pour tout $e' \in E \setminus \{e\}$, $e' \prec e$. On montre que $\prec$ est bien un ordre total sur E et qu'il étend $<$.

   Par récurrence, nous avons démontré la propriété. Notons que l'on peut aussi répondre à la question en utilisant un algorithme pour calculer un *tri topologique*. C'est un algorithme sur les graphes (on considère E muni de $<$ comme un graphe).

2. Considérons un ordre partiel $<$ sur $\mathbb{N}$. Il s'agit de montrer qu'il existe un ordre total $\prec$ qui étend $<$. On introduit les variables propositionnelles suivantes

   $$<_{ij} \qquad \prec_{ij}$$

   pour tout entier $i, j \in \mathbb{N}$.

   Considérons l'ensemble $F_<$ de formules propositionnelles, qui impose que les variables $<_{ij}$ codent l'ordre partiel $<$:

   $$\{<_{ij} \mid i < j\} \cup \{\neg <_{ij} \mid i \not< j\}$$

   Considérons l'ensemble Tot de formules propositionnelles, qui impose que les variables $\prec_{ij}$ codent un ordre partiel $\prec$:

   $$\begin{aligned} \{\prec_{ii} \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \\ \{\prec_{ij} \wedge \prec_{jk} \rightarrow \prec ik \mid i, j, k \in \mathbb{N}\} \cup \\ \{\neg(\prec_{ij} \wedge \prec_{ji}) \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\} \cup \\ \{\prec_{ij} \vee \prec_{ji} \mid i, j \in \mathbb{N}\}\,. \end{aligned}$$

   On considère maintenant l'ensemble de formules E :

   $$F_< \cup Tot \cup \{<_{ij} \rightarrow \prec_{ij}\}\,.$$

   Considérons un sous-ensemble fini E' de E. Soit J les entiers apparaissant dans les formules de E'. La restriction de $<$ à J est un ordre partiel. D'après la question précédente, il existe un ordre total sur J qui étend la restriction de $<$ à J. Autrement dit, E' est satisfaisable. Bref, tout sous-ensemble fini de E est satisfaisable. D'après le théorème de compacité, E est satisfaisable. Or l'ensemble E dit exactement que l'ordre partiel $<$ admet un ordre total $\prec$ qui l'étend.

Solution 5.5. Cas intuitif

Introduisons une variable propositionnelle p_i pour tout entier i pour dire « il pleut dans i jour ». L'énoncé « un jour, il ne pleuvra pas » se traduirait par la disjonction infinie

$$\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \dots$$

qui est une « formule infinie » (ce n'est pas une formule de logique propositionnelle).

Deuxième partie

Solutions des exercices de logique du premier ordre

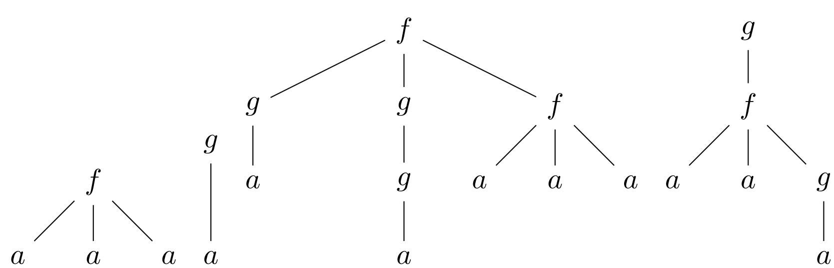
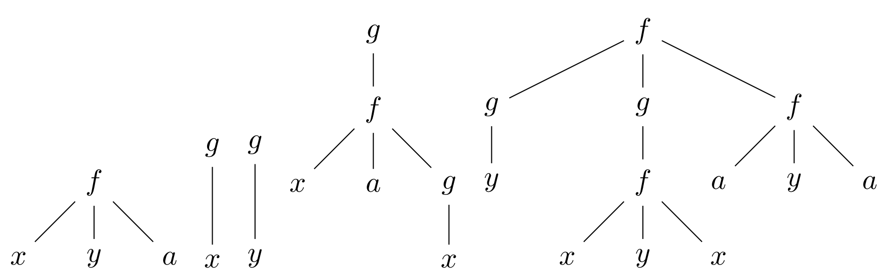
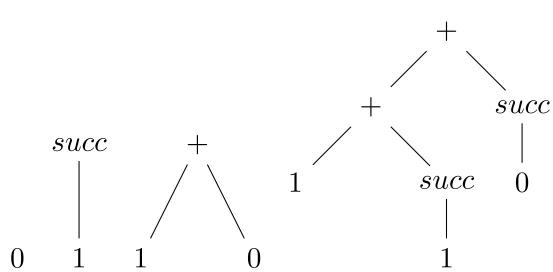
Chapitre 6

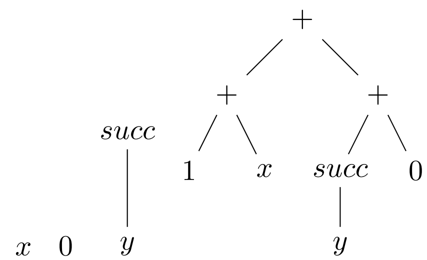
Termes

Solutions

Solution 6.1. Manipulation des termes

1.
   - Termes clos sur $\mathcal{F}_1$: $f(a,a,a),\ g(a),\ f(g(a),g(g(a)),f(a,a,a)), g(f(a,a,g(a))), \ldots$
   - Termes non clos sur $\mathcal{F}_1$: $f(x,y,a),\quad g(x),\quad g(y),\quad g(f(x,a,g(x))),$ $f(g(y),g(f(x,y,x)),f(a,y,a)), \ldots$
   - Termes clos sur $\mathcal{F}_2$: $0,\ succ(1),\ 1+0,\ (1+succ(1))+succ(0), \ldots$
   - Termes non clos sur $\mathcal{F}_2$: $x,\ 0,\ succ(y),\ (1+x)+(succ(y)+0), \ldots$

2.
   - 
   - 
   - 

- 

Solution 6.2. Signature

Pour les groupes, la signature $\{e[0], inv[1], \star[2]\}$ est adaptée, car il faut un élément neutre e, une loi de composition interne $\star$ et la fonction qui donne l'inverse d'un élément inv.
Pour les anneaux, la signature $\{0[0], 1[0], opp[1], +[2], \star[2]\}$ est adaptée, car il faut une structure de groupe abélien avec le neutre 0, la loi $+$ et l'inverse *opp* et une deuxième loi $\star$ munie de son neutre 1.
Pour les corps, la signature $\{0[0], 1[0], opp[1], inv[1]+[2], \star[2]\}$ est adaptée, car il faut simplement ajouter l'inverse pour la loi $\star$.
Pour les algèbres, la signature $\{0[0], 1[0], opp[1], +[2], \star[2]\}$ est adaptée, c'est la même que pour les anneaux, car une algèbre est une structure qui a les propriétés d'un anneau et d'un espace vectoriel.

Solution 6.3. Termes et leurs sémantiques

1. On pose la signature $\mathcal{F} = \{e[0], i[1], f[2]\}$. Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ correspond à la $\mathcal{M}$-algèbre $(D, e^{\mathcal{M}}, i^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}})$ avec $D = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $e^{\mathcal{M}} = 0$, etc.
2. On commence par montrer que l'inverse à gauche est aussi l'inverse à droite. On a $[\![f(i(x), x)]\!]_{\mathcal{M},\lambda} = [\![e]\!]_{\mathcal{M},\lambda}$ et $[\![\, f(i(i(x)), i(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} = [\![\, e \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda}$

$$\begin{aligned}
[\![\, f(x, i(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} &= [\![\, f(e, f(x, i(x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la propriété (ii)}\\
&= [\![\, f(f(i(i(x)), i(x)), f(x, i(x))) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la prop. (iii)}\\
&= [\![\, f(i(i(x)), f(i(x), f(x, i(x))) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la prop. (i)}\\
&= [\![\, f(i(i(x)), f(f(i(x), x), i(x))) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la prop. (iii)}\\
&= [\![\, f(i(i(x)), f(e, i(x))) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la propriété (i)}\\
&= [\![\, f(i(i(x)), i(x))) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la propriété (ii)}\\
&= [\![\, e \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la propriété (iii)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\, x \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} &= [\![\, f(e, x) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la propriété (ii)}\\
&= [\![\, f(f(x, i(x)), x) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par ce qu'on vient de montrer}\\
&= [\![\, f(x, f(i(x), x)) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la propriété (i)}\\
&= [\![\, f(x, e) \,]\!]_{\mathcal{M},\lambda} \text{ par la propriété (iii)}
\end{aligned}$$

Solution 6.4. Théorie équationnelle

Commençons par donner une preuve comme un mathématicien ferait.
On a $y \star x = y \star x \star \underbrace{y \star y}_{e} = \underbrace{y \star x \star y}_{\text{montrons que c'est } x} \star y$.
On a $y \star x \star y = \underbrace{x \star x}_{e} \star y \star x \star y = x \star \underbrace{x \star y \star x \star y}_{e}$ car $x \star y$ est d'ordre 2.
A partir de cette démonstration mathématique, construisons une preuve qui utilise les règles. On peut par exemple la présenter comme une suite d'égalités de termes obtenues en appliquant les règles :
Montrons dans un premier temps que $(y \star x) \star e = y \star x$.

1.	$y \star z = y \star z$	Réflexivité
2.	$x \star e = x$	(E_2)
3.	$y \star (x \star e) = y \star x$	Remplacement 1,2
4.	$y \star (x \star e) = (y \star x) \star e$	(E_1)
5.	$(y \star x) \star e = y \star (x \star e)$	Symétrie 4
6.	$(y \star x) \star e = y \star x$	Transitivité 3, 5

Ensuite montrons que $y \star x = ((y \star x) \star y) \star y$.

7.	$(y \star x) \star z = (y \star x) \star z$	Réflexivité
8.	$y \star y = e$	(E_6)
9.	$(y \star x) \star (y \star y) = (y \star x) \star e$	Remplacement 7,8
10.	$(y \star x) \star (y \star y) = y \star x$	Transitivité 9, 6
11.	$z \star (y \star y) = (z \star y) \star y$	(E_1)
12.	$y \star x = y \star x$	Réflexivité
13.	$(y \star x) \star (y \star y) = ((y \star x) \star y) \star y$	Remplacement 12,11
14.	$((y \star x) \star y) \star y = (y \star x) \star (y \star y)$	Symétrie 13
15.	$((y \star x) \star y) \star y = y \star x$	Transitivité 14, 10
16.	$y \star x = ((y \star x) \star y) \star y$	Symétrie 15

Maintenant montrons que $(y \star x) \star y = e \star x$.

17.	$(y \star x) \star y = (y \star x) \star y$	Réflexivité
18.	$z \star e = z$	(E_2)
19.	$z = z \star e$	Symétrie 18
20.	$(y \star x) \star y = ((y \star x) \star y) \star e$	Remplacement 17, 19
21.	$((y \star x) \star y) \star z = ((y \star x) \star y) \star z$	Réflexivité
22.	$x \star x = e$	(E_6)
23.	$((y \star x) \star y) \star (x \star x) = ((y \star x) \star y) \star e$	Remplacement 21,22
24.	$((y \star x) \star y) \star (x \star x) = (((y \star x) \star y) \star x) \star x$	(E_1)
25.	$((y \star x) \star y) \star e = ((y \star x) \star y) \star (x \star x)$	Symétrie 23
26.	$(y \star x) \star y = ((y \star x) \star y) \star (x \star x)$	Transitivité 20, 25
27.	$(y \star x) \star y = (((y \star x) \star y) \star x) \star x$	Transitivité 26, 24
28.	$(((y \star x) \star y) \star x) \star x = (((y \star x) \star (y \star x)) \star x$	(E_1)
29.	$(y \star x) \star (y \star x) = e$	Remplacement 12, 22
30.	$(((y \star x) \star y) \star x) \star x = e \star x$	Remplacement 29, 28
31.	$(y \star x) \star y = e \star x$	Transitivité 27, 30

Enfin montrons le résultat final $y \star x = x \star y$.

32.	$e \star x = x$	(E_3)
33.	$(y \star x) \star y = x$	Transitivité 31, 32
34.	$z \star y = z \star y$	Réflexivité
35.	$((y \star x) \star y) \star y = x \star y$	Remplacement 34,33
36.	$y \star x = x \star y$	Transitivité 16, 35

Chapitre 7

Formules

Solutions

Solution 7.1. Signature

Voici quelques formules sur la signature $\mathcal{S}$:

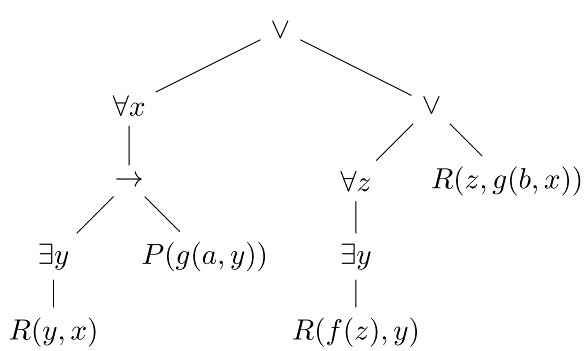
$$\forall x\; x \cap y \subseteq x$$

$$\forall y\; y \cup \emptyset = y$$

$$\forall x \exists y\; (((x \cup y) \setminus z) = x \to x \cap y \subseteq z)$$

Les deux premières formules sont valides pour x et y des ensembles quand on interprète les symboles de fonction et de relation comme pour les ensembles mathématiques. La dernière formule n'est pas valide, mais c'est quand même une formule écrite sur la signature $\mathcal{S}$.

Solution 7.2. Syntaxe

1. 

2. Pour voir les occurrences libres, il suffit de regarder les variables qui ne sont pas sous la portée d'un quantificateur, cela se voit bien sur la représentation sous forme d'arbre. Les occurrences libres sont soulignées :

$$\forall x \left[\exists y\; R(y, x) \to P(g(a, \underline{y}))\right] \vee \left[\forall z \exists y\; R(f(z), y) \vee R(\underline{z}, g(b, \underline{x}))\right].$$

   Toutes les autres occurrences sont liées.

3. Les formules atomiques sont aux feuilles de l'arbre, autrement dit, ce sont les formules suivantes : $R(y, x)$, $P(g(a, y))$, $R(f(z), y)$ et $R(z, g(b, x))$.

4. Les termes sont les éléments à l'intérieur des relations des formules atomiques, autrement dit, ce sont les éléments suivants : y, x, $g(a, y)$, $f(z)$, z, $g(b, x)$.

Solution 7.3. Structures

On utilise la notation infixe pour le symbole de relation R, on notera donc xRy pour $R(x, y)$ afin de coller à l'écriture usuelle de $x \leqslant y$ plutôt que $\leqslant (x, y)$.

1) On veut une formule qui soit vraie dans $\mathbb{N}$ et fausse dans $\mathbb{Z}$ munis du symbole de relation R interprété comme la relation « inférieur ou égal ». Par exemple, on peut prendre une formule qui traduit le fait qu'il y a un plus petit élément dans $\mathbb{N}$, ce qui est faux pour $\mathbb{Z}$, on écrit alors :

$$\exists x \forall y \; xRy$$

2) On veut une formule qui vraie dans $\mathbb{Q}$ et fausse dans $\mathbb{Z}$. Par exemple, on peut prendre une formule qui traduit le fait qu'entre deux rationnels différents on peut toujours trouver un autre rationnel, ce qui n'est pas vraie dans $\mathbb{Z}$ pour des entiers successifs :

$$\forall x \forall y (\neg yRx \rightarrow \exists z (\neg zRx \wedge \neg yRz))$$

3) On veut une formule qui soit vraie dans $\mathbb{N}$ muni de la multiplication et fausse dans les partie de $\mathbb{N}$ muni de l'intersection. Par exemple, on utiliser l'idempotence de l'intersection (pour tout ensemble A, on a $A \cap A = A$) alors que la multiplication n'est pas toujours idempotente (il existe des entiers n tels que $n^2 \neq n$), on pose alors la formule :

$$\exists x \; \neg (x * x = x)$$

4) On veut une formule qui soit vraie dans les entiers positifs et fausse dans les entiers relatifs. Par exemple, on peut utiliser le fait que la fonction $n \mapsto n^2$ est injective dans $\mathbb{N}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$, en remarquant que $n^2 = 1$ n'a qu'une solution dans $\mathbb{N}$ mais en a deux dans $\mathbb{Z}$ (1 et -1), on écrit alors la formule :

$$\forall x (x * x = a \rightarrow x = a)$$

5) On veut une formule qui soit vraie dans les réels et fausse dans les rationnels. Par exemple, on peut utiliser que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel en écrivant qu'il existe x tel que $x^2 = 2$, on pose alors la formule :

$$\exists x \; (x * x = b \oplus b)$$

6) On veut une formule qui soit vraie pour la relation de congruence modulo 2 mais fausse pour la relation de congruence modulo 3. Par exemple, on peut exprimer que modulo 2, on est soit congru à 0 soit congru à 1, ce qui n'est pas vraie modulo 3, on écrit alors :

$$\exists x \exists y \forall z (zRx \vee zRy)$$

7) On veut une formule qui soit vraie pour les réels et fausse pour les entiers munis de la relation d'ordre $\leqslant$. Par exemple, on peut utiliser le fait qu'on peut toujours trouver un élément strictement plus petit que d'importe quel élément dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \exists y \; (yRx \wedge \neg (x = y))$$

8) On veut une formule qui soit vraie pour les entiers positifs et fausse pour les entiers relatifs munis de la relation de successeur. Par exemple, on peut utiliser que 0 n'est pas un successeur dans $\mathbb{N}$, alors qu'il l'est dans $\mathbb{Z}$, on écrit alors :

$$\exists x \forall y \; \neg yRx$$

Solution 7.4. Équivalences

1. Les clôtures universelles des formules $x = y$ et $\forall x \forall y\ x = y$ sont équivalentes. Pourtant, ces formules ne sont pas équivalentes puisque dans un modèle $\mathcal{M}$ de domaine $\{0, 1\}$, on a

$$\mathcal{M}, [x := 1, y := 1] \models x = y \text{ et } \mathcal{M}, [x := 1, y := 1] \not\models \forall x \forall y\ x = y$$

   En effet, dans la deuxième partie, l'affectation ne sert à rien, puisque $\forall x \forall y\ x = y$ est une formule close et cette formule n'est pas vraie car pour x ayant pour valeur 0 et y ayant pour valeur 1, il n'y a pas égalité.

2. Elle n'est pas valide car non satisfaite par la structure $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, =)$, c'est à dire la structure où le domaine est $\mathbb{N}$ et où le symbole de relation R est interprété comme l'égalité dans $\mathbb{N}$.

3. Cette fois, la formule est valide, et pour le montrer, on peut prouver que cette formule est satisfaite par toute structure $\mathcal{M}$ quelconque.

   Il suffit pour cela d'appliquer la définition de $\models$. Soit une structure $\mathcal{M}$. Par définition, $\mathcal{M} \models \exists x \forall y\ R(x, y) \to \forall y \exists x\ R(x, y)$ si et seulement si : si $\mathcal{M} \models \exists x \forall y\ R(x, y)$ alors $\mathcal{M} \models \forall y \exists x\ R(x, y)$. Supposons que $\mathcal{M} \models \exists x \forall y\ R(x, y)$. Alors, par définition, il existe une valeur a_1 dans $\mathcal{M}$ telle que $\mathcal{M} \models \forall y\ R(a_1, y)$. Soit a_2 une valeur dans $\mathcal{M}$. Alors, toujours par définition, d'après ce qui précède, $\mathcal{M} \models R(a_1, a_2)$. Donc, $\mathcal{M} \models \exists x\ R(x, a_2)$ (par définition). Ceci est vrai pour toute valeur a_2, donc, par définition, $\mathcal{M} \models \forall y \exists x\ R(x, y)$. Donc $\mathcal{M} \models \exists x \forall y\ R(x, y) \to \forall y \exists x\ R(x, y)$. Ceci est vrai pour toute structure $\mathcal{M}$, donc la formule $\exists x \forall y\ R(x, y) \to \forall y \exists x\ R(x, y)$ est valide.

4. C'est pareil. Juste pour que le lecteur prenne conscience qu'une formule $\varphi(x, y)$ ou $R(x, y)$ c'est un peu pareil.

5. Par l'absurde. Supposons qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ avec $\mathcal{M} \models \exists x \forall y\, (R(x, y) \leftrightarrow R(\neg y, y))$. En utilisant les conditions de vérité, on a l'existence d'un élément d dans le domaine de cette structure, tel que pour tout élément d' on ait $(d, d') \in R_{\mathcal{M}}$ ssi $(d', d') \notin R_{\mathcal{M}}$.

   En particulier, pour $d' = d$, on a $(d, d) \in R_{\mathcal{M}}$ ssi $(d, d) \notin R_{\mathcal{M}}$. Contradiction.

6. On peut procéder par équivalences sémantiques successives.

$$\begin{array}{rcl}
\exists x \exists y\, (\varphi(x, y) \to \psi(x, y)) & \equiv & \exists x \exists y\, (\neg\varphi(x, y) \vee \psi(x, y)) \\
& \equiv & \exists x \exists y\, \neg\, (\varphi(x, y) \wedge \neg\psi(x, y)) \\
& \equiv & \neg[\forall x \forall y\, (\varphi(x, y) \wedge \neg\psi(x, y))] \\
& \equiv & \neg[\forall x \forall y\ \varphi(x, y) \wedge \forall x \forall y\ \neg\psi(x, y)] \\
& \equiv & \neg(\forall x \forall y\ \varphi(x, y)) \vee \neg(\forall x \forall y\ \neg\psi(x, y)) \\
& \equiv & \neg(\forall x \forall y\ \varphi(x, y)) \vee (\exists x \exists y\ \psi(x, y)) \\
& \equiv & (\forall x \forall y\ \varphi(x, y)) \to (\exists x \exists y\ \psi(x, y))
\end{array}$$

7. Pour plus de lisibilité, on considère

$$F'' \stackrel{def}{=} \forall z \forall w\, (\varphi(z, w) \to \psi(z, w)) \quad \text{et} \quad F' \stackrel{def}{=} F'' \to \exists x \exists y\, (\varphi(x, y) \to \theta(x, y))\,.$$

   La formule F est donc représentée par $\forall x \forall y\, (\varphi(x, y) \to \varphi(y, x)) \to F'$.

   Visuellement, on a :

$$\forall x \forall y\, (\varphi(x, y) \to \varphi(y, x)) \to \underbrace{\left[\overbrace{\forall z \forall w\, (\varphi(z, w) \to \psi(z, w))}^{F''} \to \exists x \exists y\, (\varphi(x, y) \to \theta(x, y)) \right]}_{F'}$$

Dans un premier temps, par renommage des variables, on obtient $F'' \equiv \forall x \forall y\,(\varphi(x,y) \to \psi(x,y))$.
On a donc $F' \equiv \forall x \forall y A(x,y) \to \exists x \exists y B(x,y)$, avec $A(x,y) = \varphi(x,y) \to \psi(x,y)$ et $B(x,y) = \varphi(x,y) \to \theta(x,y)$. En appliquant le résultat de la question précédente (avec A et B au lieu de φ et ψ), on déduit $F' \equiv \exists x \exists y(A(x,y) \to B(x,y))$.
Par conséquent,

$$F \equiv \forall x \forall y\,(\varphi(x,y) \to \varphi(y,x)) \to \exists x \exists y(A(x,y) \to B(x,y)).$$

Enfin, en réappliquant le résultat de la question précédente, on conclut $F \equiv \exists x \exists y G(x,y)$ avec $G(x,y) = (\varphi(x,y) \to \varphi(y,x)) \to (A(x,y) \to B(x,y))$.

Solution 7.5. Forme prénexe

(a)

$$\begin{aligned}
&\exists x P(x) \vee \exists x\,(P(x) \to \forall y\; R(x,y))\\
\equiv\; &\exists z P(z) \vee \exists x \forall y\,(P(x) \to R(x,y))\\
\equiv\; &\exists z \exists x \forall y\,(P(z) \vee (P(x) \to R(x,y)))
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\forall x\,(P(x) \to \exists y\,((Q(y) \vee T(y)) \to \exists y\; \neg R(x,y)))\\
\equiv\; &\forall x\,(P(x) \to \exists y \exists z\,((Q(y) \vee T(y)) \to \neg R(x,z)))\\
\equiv\; &\forall x \exists y \exists z\,(P(x) \to ((Q(y) \vee T(y)) \to \neg R(x,z)))
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
&(P(x) \vee \neg \exists y\; R(x,y)) \to \exists y\,(R(x,y) \vee Q(y))\\
\equiv\; &\exists z\,(\forall y\,(P(x) \vee \neg R(x,y)) \to (R(x,z) \vee Q(z)))\\
\equiv\; &\exists z \exists y\,((P(x) \vee \neg R(x,y)) \to (R(x,z) \vee Q(z)))
\end{aligned}$$

Solution 7.6. Jointure

Soit une structure (relationnelle) $\mathcal{M}$ munie de deux relations R_1 et R_2 d'arités respectives n et m, et soient des entiers $1 \leqslant k_1, \ldots, k_p \leqslant n$ et $1 \leqslant \ell_1, \ldots, \ell_p \leqslant m$.
Étant donné un ensemble de couples $J = \{(k_1, \ell_1), (k_2, \ell_2), \ldots, (k_p, \ell_p)\}$, on définit la *$J$-jointure* de R_1 et R_2 comme la relation notée $R_1 \bowtie_J R_2$, en deux étapes.

1. On construit d'abord le sous-ensemble R de D^{n+m} formé des tuples qui satisfont les contraintes imposées dans J, c'est-à-dire des $(d_1, \ldots, d_n, d'_1, \ldots, d'_m) \in D^{n+m}$ tels que $(d_1, \ldots, d_n) \in R_1, (d'_1, \ldots, d'_m) \in R_2$, et $d_k = d'_\ell$, pour tout $(k, \ell) \in J$.
2. On projète ensuite cet ensemble R sur les composantes non-redondantes pour obtenir la jointure.

   On définit $L \stackrel{def}{=} \{n + \ell_j | \ell_j \in \pi_2(J)\}$, et on note $\pi_{\notin L}(R)$ la projection sur toutes les composantes sauf celles dans L.
   On pose alors $R_1 \bowtie_J R_2 \stackrel{def}{=} \pi_{\notin L}(R)$. Notons que la relation obtenue est d'arité $n + m - p$ où $p = |\pi_2(J)|$.

Chapitre 8

Cardinalité des modèles

Solutions

Solution 8.1. Formes de Skolem

1. (a)

$$\begin{aligned} &\exists z \exists x \forall y\, (P(z) \vee (P(x) \to R(x,y))) \\ \rightsquigarrow\ &\forall y\, (P(a) \vee (P(b) \to R(b,y))) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} &\forall x \exists y \exists z\, (P(x) \to ((Q(y) \vee T(y)) \to \neg R(x,z))) \\ \rightsquigarrow\ &\forall x\, (P(x) \to ((Q(f(x)) \vee T(f(x))) \to \neg R(x,g(x)))) \end{aligned}$$

   (c) il faut bien noter que la variable x est libre, ici.

$$\begin{aligned} &\exists z \exists y\, ((P(x) \vee \neg R(x,y)) \to (R(x,z) \vee Q(z))) \\ \rightsquigarrow\ &(P(x) \vee \neg R(x,g(x))) \to (R(x,f(x)) \vee Q(f(x))) \end{aligned}$$

2. Le modèle $\mathcal{M}$ où le domaine est $\mathbb{N}$ et l'interprétation de P est l'égalité à zéro satisfait la formule $\exists x P(x) \vee \exists x\, (P(x) \to \forall y\, R(x,y))$ en prenant pour x la valeur 0. Cependant, ce n'est pas un modèle de sa forme de Skolem $\forall y\, (P(a) \vee (P(b) \to R(b,y)))$ car on n'a pas donné l'interprétation de la constante a.
3. Le modèle précédent avec pour interprétation de a la valeur 0 est un modèle de la forme de Skolem $\forall y\, (P(a) \vee (P(b) \to R(b,y)))$. C'est aussi un modèle de la formule de départ, car il suffit d'« oublier » l'interprétation des nouveaux symboles de constante, on pourra le voir plus explicitement dans la preuve du Théorème 8.10 de l'exercice suivant.

Solution 8.2. Réciproque Théorème 8.10

Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que la formule φ est en forme prénexe.

Nous raisonnons alors par récurrence sur le nombre de quantificateurs apparaissant dans φ pour établir que la restriction d'une $(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}_{sk}, \mathcal{R})$-structure $\mathcal{M}$ qui satisfait $Sk(\varphi)$ à la signature $\mathcal{S}$ est une structure qui satisfait la formule φ.
Pour ce raisonnement, il est nécessaire de s'autoriser des formules non closes. Aussi dans la suite, nous montrons le résultat plus fort suivant :

Lemme

Pour toute formule φ en forme prénexe sur une signature $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$, toute affectation λ, et toute $(\mathcal{F} \cup \mathcal{F}_{sk}, \mathcal{R})$-structure $\mathcal{M}$, on a :

$$\mathcal{M}, \lambda \models Sk(\varphi) \text{ implique } \mathcal{M}_{|\mathcal{S}}, \lambda \models \varphi$$

où la $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}_{|\mathcal{S}}$ est obtenue à partir de $\mathcal{M}$ en oubliant les symboles de Skolem, c'est-à-dire les symboles dans $\mathcal{F}_{sk}$.

Comme annoncé, nous procédons par récurrence sur le nombre de quantificateurs apparaissant dans φ.

- Pour une formule φ sans quantificateur, on a $Sk(\varphi) = \varphi$ et cette formule ne contient aucun symbole de fonction dans $\mathcal{F}_{sk}$, de sorte que $\mathcal{M}, \lambda \models Sk(\varphi)$ implique $\mathcal{M}_{|\mathcal{S}}, \lambda \models \varphi$.
- Si la formule φ en forme prénexe a des quantificateurs, on considère deux cas selon que le premier quantificateur est universel ou existentiel.
  - Si $\varphi \overset{def}{=} \forall x\ \psi$, et puisque par définition $Sk(\forall x\ \psi) = \forall x\ Sk(\psi)$, on a :

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{M}, \lambda \models Sk(\forall x\ \psi) \\ & \text{ssi } \mathcal{M}, \lambda \models \forall x\ Sk(\psi) \\ & \text{ssi pour tout } d \in D_{\mathcal{M}}, \text{ on a } \mathcal{M}, \lambda[x := d] \models Sk(\psi) \\ \text{(par hypothèse de récurrence) implique} & \text{pour tout } d \in D_{\mathcal{M}_{|\mathcal{S}}}, \mathcal{M}_{|\mathcal{S}}, \lambda[x := d] \models \psi \\ & \text{ssi } \mathcal{M}_{|\mathcal{S}}, \lambda \models \forall x\ \psi. \end{array}$$

  - Si $\varphi \overset{def}{=} \exists x\ \psi$:

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{M}, \lambda \models Sk(\exists x\ \psi) \\ & \text{ssi } \mathcal{M}, \lambda \models Sk(\psi)\{x \mapsto f_{x,\psi}(y_1, \dots, y_m)\} \text{ où } y_1, \dots, y_m \text{ est une} \end{array}$$

énumération des variables libres de $\exists x\ \psi$, et où $f_{x,\psi}$ est le symbole de Skolem lié à x et ψ

$$\begin{array}{rl} \text{(Lemme 7.59 de subst.)} & \text{ssi } \mathcal{M}, \lambda[x := {f_{x,\psi}}^{\mathcal{M}}(\lambda(y_1), \dots, \lambda(y_m))] \models Sk(\psi) \\ \text{(par hyp. de rec.)} & \text{implique } \mathcal{M}_{|\mathcal{S}}, \lambda[x := {f_{x,\psi}}^{\mathcal{M}}(\lambda(y_1), \dots, \lambda(y_m))] \models \psi \\ & \text{implique } \mathcal{M}_{|\mathcal{S}}, \lambda \models \exists x\ \psi. \end{array}$$

Solution 8.3. Connexité d'un graphe

Nous allons le montrer par l'absurde. Supposons qu'une telle formule φ existe. Soit s, s' deux symboles de constante représentant deux sommets du graphe. On peut représenter le fait qu'il n'existe pas de chemin de longueur n entre les sommets s et s' par la formule ψ_n :

$$n = 1 : \psi_n \overset{def}{=} \neg(s \sim s')$$
$$n > 1 : \psi_n \overset{def}{=} \neg \big(\exists x_2 \cdots \exists x_n (s \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3) \wedge \cdots \wedge (x_n \sim s')\big)$$

Soit l'ensemble de formules $\Gamma' = \Gamma \cup \{\psi_n, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\varphi\}$. Soit $\Gamma_{fini} \subseteq \Gamma'$ un sous-ensemble fini de Γ'. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant m, \psi_n \notin \Gamma_{fini}$. Le graphe $s \sim x_2 \sim \cdots \sim x_m \sim s'$ est alors un modèle de Γ_{fini} car il est connexe et il n'existe pas de chemin de longueur strictement inférieure à m dans le graphe : ainsi, toute sous-partie finie Γ_{fini} de Γ' est satisfaisable. Par le théorème de compacité, l'ensemble Γ' l'est aussi. Soit $\mathcal{G}$ un modèle de Γ'. On a $\mathcal{G} \models \varphi$, donc il existe un chemin entre s et s', on note n sa longueur. Or $\mathcal{G} \models \psi_n$ qui exprime qu'il n'existe pas de chemin de longueur n entre s et s'. Contradiction.

Solution 8.4. Corps non archimédiens

On se place sur la signature $\mathcal{S} = (\{0[0], 1[0], +[2], \times[2]\}, \{=[2], \leqslant[2]\})$Comme on le verra au chapitre sur les théories, on peut trouver un ensemble Γ de formules, appelées axiomes, définissant la théorie des corps bien ordonnés. On ajoute à la signature le symbole de constante $\varepsilon[0]$. On considère l'ensemble

$$\Gamma' \stackrel{def}{=} \Gamma \cup \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{n \times \varepsilon \leqslant 1 \wedge \neg(n \times \varepsilon = 1)\}$$

où n correspond à $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}}$. Toute partie finie Γ'_{fini} de Γ' est satisfaisable car $\mathbb{R}$ est un modèle Γ'. En effet, $\mathbb{R}$ est un modèle de Γ et il suffit de prendre comme interprétation pour ε le réel $\frac{1}{N+1}$ où N est l'entier maximal des

$$\{n \times \varepsilon \leqslant 1 \wedge \neg(n \times \varepsilon = 1)\}$$

qui apparaissent dans Γ'_{fini}. Donc $\mathbb{R}$ est un modèle de Γ'_{fini}. Par le théorème de compacité, Γ' est satisfaisable. Un modèle de Γ' est alors un corps non archimédien.

Chapitre 9

Problème VALIDE

Solutions

Solution 9.1. Résolution d'un ensemble de clauses

Il y a une faute dans l'énoncé : il faut montrer que

$$\{P(x,x), \neg P(x,y) \vee P(x,s(y))\} \vdash^{*}_{\mathbf{R1}} P(x,s(x)).$$

Pour cela, il faut prendre la négation de $P(x,s(x))$ et le rajouter dans l'ensemble de clause de départ. On veut donc aboutir à $\perp$ en partant des clauses suivantes :

$$\{P(x,x), \neg P(x,y) \vee P(x,s(y)), \neg P(x,s(x))\}.$$

On utilise deux fois la règle de coupure.

$$\frac{\neg P(x,y) \vee P(x,s(y)) \quad \neg P(x,s(x))}{\neg P(x,x)}\ coupure$$

où l'on a utilisé l'unificateur principal $[y := x]$. Puis

$$\frac{\neg P(x,x) \quad P(x,x)}{\perp}\ coupure$$

Solution 9.2. Complétude du système de résolution

1. On a besoin de la skolémisation pour mettre les formules en forme clausale (voir Figure 8.1 page 154) afin de pouvoir appliquer les règles de la résolution. Les unificateurs principaux sont là pour ne pas perdre de généralité sur les unifications que l'on fait. On a besoin d'unifier des termes pour pouvoir comparer deux clauses et appliquer la règle de coupure.
2. Il faut mettre en forme clausale les formules $\neg\varphi$, ψ et θ.
   ψ devient $C_1 \stackrel{def}{=} R(x,y) \vee R(f(x),x)$ et $C_2 \stackrel{def}{=} R(x,y) \vee R(x,f(x))$.
   θ devient $C_3 \stackrel{def}{=} \neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)$.
   $\neg\varphi$ devient $C_4 \stackrel{def}{=} \neg R(x,x)$.
   On fait la résolution entre C_1 et C_4, on obtient la clause $C_5 \stackrel{def}{=} R(f(x),x)$. On fait la résolution entre C_2 et C_4, on obtient $C_6 \stackrel{def}{=} R(x,f(x))$. On fait la résolution entre C_3, C_5 puis C_6, on obtient $C_7 \stackrel{def}{=} R(x,x)$. On fait la résolution de C_7 et C_5, on obtient la clause vide.

Solution 9.3. Application

1. On utilise les relations suivantes :
   - $\mathsf{malade}(x)$: x est malade.
   - $\mathsf{rester}(x)$: x doit rester chez lui
   - $\mathsf{fièvre}(x)$: x a de la fièvre.
   - $\mathsf{tousse}(x)$: x tousse.
   - $\mathsf{temp}(x)$: x a la température supérieure à $38°$.

   On utilisera la constante Michel.

   On modélise par :

   (i) $\forall x(\mathsf{malade}(x) \to \mathsf{rester}(x))$

   (ii) $\forall x((\mathsf{fièvre}(x) \wedge \mathsf{tousse}(x)) \to \mathsf{malade}(x))$

   (iii) $\forall x(\mathsf{temp}(x) \to \mathsf{fièvre}(x))$

   (iv) $\mathsf{tousse}(\mathsf{Michel}) \wedge \mathsf{temp}(\mathsf{Michel})$

   (v) $\mathsf{reste}(\mathsf{Michel})$
2. Il faut mettre en forme clausale les énoncés (i), (ii), (iii), (iv) et $\neg$(v).

   (i) C_1 $\forall x(\neg\mathsf{malade}(x) \vee \mathsf{rester}(x))$

   (ii) C_2 $\forall x(\neg\mathsf{fièvre}(x) \vee \neg\mathsf{tousse}(x) \vee \mathsf{malade}(x))$

   (iii) C_3 $\forall x(\neg\mathsf{temp}(x) \vee \mathsf{fièvre}(x))$

   (iv) C_4 $\mathsf{tousse}(\mathsf{Michel})$

   (iv) C_5 $\mathsf{temp}(\mathsf{Michel})$

   $\neg$(v) C_6 $\neg\mathsf{reste}(\mathsf{Michel})$

   C_3 et C_5 donne $C_7 \stackrel{def}{=} \mathsf{fièvre}(\mathsf{Michel})$

   C_7 et C_2 donne $C_8 \stackrel{def}{=} \neg\mathsf{tousse}(\mathsf{Michel}) \vee \mathsf{malade}(\mathsf{Michel})$

   C_8 et C_4 donne $C_9 \stackrel{def}{=} \mathsf{malade}(\mathsf{Michel})$

   C_9 et C_1 donne $C_{10} \stackrel{def}{=} \mathsf{rester}(\mathsf{Michel})$

   C_{10} et C_6 donne $\perp$.

Solution 9.4. Problème de validité

C'est le Théorème 11.29 du livre.

Solution 9.5. Formule monadique

Soit φ une formule monadique, *i.e.* une formule de la logique du premier ordre qui ne contient pas de symboles de fonctions et tous les symboles de relations sont d'arité 1 (on les appelle alors *symboles de prédicats*). Nous allons montrer que si φ est satisfaisable, alors φ est satisfaisable dans un modèle de taille au plus 2^n, où n est le nombre de symboles de prédicats apparaissant dans φ.

Soit φ une formule satisfaisable. Il existe donc un modèle $\mathcal{M} = (D, \{R^{\mathcal{M}}\}_{R\in\mathcal{R}})$ qui satisfait φ. On dira que deux éléments $d, d' \in D$ sont équivalents, noté $d \sim d'$, si d et d' satisfont les mêmes prédicats. Formellement, $d \sim d'$ ssi pour tout symbole de prédicats R, ($d \in R^{\mathcal{M}}$ ssi $d' \in R^{\mathcal{M}}$). La relation $\sim$ est bien une relation d'équivalence et on note $[d]_\sim$ la classe d'équivalence d'un élément $d \in D$.

On construit le modèle $\mathcal{M}' = (D', \left\{R^{\mathcal{M}'}\right\}_{R\in\mathcal{R}})$ de la façon suivante :

- D' est l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$, *i.e.* $D' \stackrel{def}{=} \{[d]_\sim \mid d \in D\}$.

- $R^{\mathcal{M}'} \stackrel{def}{=} \{[d]_\sim \mid d \in R^{\mathcal{M}}\}$.

Ce modèle est bien de taille au plus 2^n. On montre par induction sur ψ que $\mathcal{M}, \lambda \models \psi$ ssi $\mathcal{M}', \lambda_\sim \models \psi$ avec $\lambda_\sim$ défini par $\lambda_\sim(x) \stackrel{def}{=} [\lambda(x)]_\sim$.

- Cas de base d'une formule atomique.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, \lambda \models R(x) \text{ ssi } & \lambda(x) \in R^{\mathcal{M}} \\ & \lambda_\sim(x) \in R^{\mathcal{M}'} \\ & \mathcal{M}', \lambda_\sim \models R(x) \end{aligned}$$

- Les autres cas sont laissés au lecteur ou à la lectrice.

Ainsi, $\mathcal{M}' \models \varphi$. Le problème de satisfiabilité d'une formule monadique est alors décidable. Un algorithme consiste à parcourir tous les modèles de taille au plus 2^n. Il y a en un nombre fini. Puis pour chacun d'eux, on teste s'il satisfait φ. Si oui, la formule est satisfaisable. Si aucun d'eux ne satisfiait φ, alors φ n'est pas satisfaisable.

Chapitre 10

Systèmes de preuves

Solutions

Solution 10.1. Correction de la déduction naturelle

Il suffit de continuer la preuve du Théorème 10.8 (page 180) en effectuant l'induction pour toutes les règles de la déduction naturelle. Pour plus de détails, c'est l'objet de la preuve de la Proposition 2.5.13, page 82, du livre « Introduction à la logique : Théorie de la démonstration » de René David, Karim Nour et Christophe Raffali [DNR04].

Solution 10.2. Systèmes de preuves

1.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \forall y R(x,y) \vdash \forall y R(x,y) & \text{axiome} \\
2 & \forall y R(x,y) \vdash R(x,y) & \text{elim } \forall\ 1 \\
3 & \forall y R(x,y) \vdash \exists x R(x,y) & \text{intro } \exists\ 2 \\
4 & \forall y R(x,y) \vdash \forall y \exists x R(x,y) & \text{intro } \forall\ 3 \\
5 & \exists x \forall y R(x,y) \vdash \exists x \forall y R(x,y) & \text{axiome} \\
6 & \exists x \forall y R(x,y), \forall y R(x,y) \vdash \forall y \exists x R(x,y) & \text{affaiblissement } 4 \\
7 & \exists x \forall y R(x,y) \vdash \forall y \exists x R(x,y) & \text{elim } \exists\ 5,6 \\
8 & \vdash \exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y) & \text{intro } \to\ 7
\end{array}
$$

2.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R(x,y) \vdash R(x,y)}\ \text{axiome}}{\forall y R(x,y) \vdash R(x,y)}\ \forall_g}{\forall y R(x,y) \vdash \exists x R(x,y)}\ \exists_d}{\forall y R(x,y) \vdash \forall y \exists x R(x,y)}\ \forall_d}{\exists x \forall y R(x,y) \vdash \forall y \exists x R(x,y)}\ \exists_g}{\vdash \exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)}\ \to_d
$$

Solution 10.3. Paradoxe du buveur

- Pour modéliser la situation, on se place sur la signature possédant un unique symbole de relation B d'arité 1. Pour l'interprétation, on considèrera la strucure dont le domaine (non vide) est composé des individus présents dans le bar et l'interprétation de B est l'ensemble des individus qui boivent. On écrit alors la formule :

$$\exists x(B(x) \to \forall y\; B(y)).$$

- Dans le langage courant, avec la formulation de l'énoncé, on l'impression que la phrase n'est pas tout le temps vraie, mais cela vient du fait que l'implication logique n'est pas la même que l'implication du langage courant (voir Section « Zoom sur l'implication », page 33). En effet, si toutes les personnes du bar boivent, on peut prendre n'importe quelle personne dans le bar telle que « si elle boit, tout le monde boit » et s'il existe une personne qui ne boit pas, il suffit de prendre cette personne afin de dire « si elle boit, tout le monde boit ». En effet, comme elle ne boit pas la prémisse est fausse, donc l'implication est vraie.

  En pratique, l'astuce consiste à utiliser le tiers-exclu (TE) sur la formule $\exists x \neg B(x)$ (notée φ)

  Grâce à cela, on va pouvoir utiliser la règle d'élimination du $\lor$.

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \varphi \lor \neg\varphi}\,(TE) \qquad \dfrac{}{\varphi \vdash \exists x(B(x) \to \forall y B(y))}\,(P1) \qquad \dfrac{}{\neg\varphi \vdash \exists x(B(x) \to \forall y B(y))}\,(P2)}{\vdash \exists x\,(B(x) \to \forall y B(y))}\,\text{elim } \lor$$

$(P1)$

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x \neg B(x) \vdash \exists x \neg B(x)}\,\text{axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B(a) \vdash \neg B(a)}\,\text{axiome}}{\neg B(a), B(a) \vdash \neg B(a)}\,\text{aff} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B(a) \vdash B(a)}\,\text{axiome}}{\neg B(a), B(a) \vdash B(a)}\,\text{aff}}{\neg B(a), B(a) \vdash \bot}\,\text{elim } \neg}{\neg B(a), B(a), \neg\,(\forall y B(y)) \vdash \bot}\,\text{aff}}{\neg B(a), B(a) \vdash \forall y B(y)}\,\text{absurde}}{\neg B(a) \vdash B(a) \to \forall y B(y)}\,\text{intro} \to}{\neg B(a) \vdash \exists x(B(x) \to \forall y B(y))}\,\text{intro } \exists}{}}{\exists x \neg B(x) \vdash \exists x(B(x) \to \forall y B(y))}\,\text{elim } \exists$$

$(P2)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\exists x \neg B(x)), B(a), \neg B(y) \vdash \neg(\exists x \neg B(x))}\,\text{axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B(a), \neg B(y) \vdash \neg B(y)}\,\text{axiome}}{B(a), \neg B(y) \vdash \exists x \neg B(x)}\,\text{intro } \exists}{\neg(\exists x \neg B(x)), B(a), \neg B(y) \vdash \exists x \neg B(x)}\,\text{aff}}{\neg(\exists x \neg B(x)), B(a), \neg B(y) \vdash \bot}\,\text{elim } \neg}{\neg(\exists x \neg B(x)), B(a) \vdash B(y)}\,\text{absurde}}{\neg(\exists x \neg B(x)), B(a) \vdash \forall y B(y)}\,\text{intro } \forall}{\neg(\exists x \neg B(x)) \vdash B(a) \to \forall y B(y)}\,\text{intro} \to}{\neg(\exists x \neg B(x)) \vdash \exists x(B(x) \to \forall y B(y))}\,\text{intro } \exists$$

(TE)

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)}\text{ axiome}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \varphi}\text{ axiome}
        }{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\text{ intro } \vee
        \quad
        \dfrac{}{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \neg(\varphi \vee \neg\varphi)}\text{ axiome}
      }{\neg(\varphi \vee \neg\varphi), \varphi \vdash \bot}\text{ elim } \neg
    }{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \neg\varphi}\text{ absurde}
  }{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \varphi \vee \neg\varphi}\text{ intro } \vee
}{
  \dfrac{\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \vdash \bot}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi}\text{ absurde}
}\text{ elim } \neg
$$

Chapitre 11

Théories du premier ordre

Solutions

Solution 11.1. Insatisfaisabilité de la logique du premier ordre

Si une théorie $\mathcal{T}$ est insatisfaisable, c'est que $\perp$ est conséquence logique de $\mathcal{T}$. Or pour toute formule φ du premier ordre, la formule $\perp \to \varphi$ est valide, donc φ est conséquence logique de $\mathcal{T}$. Réciproquement, l'ensemble des formules de logique du premier ordre est insatisfaisable, car il n'existe pas de modèle qui satisfait toutes les formules du premier ordre. En effet, soit un modèle $\mathcal{M}$ et soit une formule φ. On ne peut pas avoir $\mathcal{M} \models \varphi$ et $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

Solution 11.2. Axiomes de la théorie des corps

On se place sur la signature $\mathcal{S} = \{0[0], 1[0], +[2], \times[2]\}$.

1. $\forall x \forall y \forall z\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (Associativité $+$)
2. $\forall x \forall y \forall z\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ (Associativité $\times$)
3. $\forall x \forall y\ x + y = y + x$ (Commutativité $+$)
4. $\forall x\ x + 0 = x$ (Neutre $+$)
5. $\forall x\ x \times 1 = x \wedge 1 \times x = x$ (Neutre $\times$)
6. $\forall x \exists y\ x + y = 0$ (Inverse $+$)
7. $\forall x (\neg(x = 0) \to \exists y (x \times y = 1 \wedge y \times x = 1))$ (Inverse $\times$)
8. $\forall x \forall y \forall z\ (x + y) \times z = x \times z + y \times z$ (Distributivité)
9. $\forall x \forall y \forall z\ z \times (x + y) = z \times x + z \times y$ (Distributivité)

Solution 11.3. Arithmétique de Robinson

1. Il suffit d'exhiber une $\mathcal{S}$-structure (ou modèle) de l'arithmétique élémentaire satisfaisant l'axiome de commutativité ; l'ensemble des entiers naturels muni de l'interprétation usuelle des symboles de la signature convient.
2. On construit une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ de l'arithmétique élémentaire où l'axiome de commutativité n'est pas respecté. On prend pour domaine $D_{\mathcal{M}} = \mathbb{N} \cup \{\omega_1, \omega_2\}$ (où $\omega_1, \omega_2 \notin \mathbb{N}$ sont deux éléments distincts) et dans ce qui suit, pour tout $i \in \{1, 2\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $x \in D_{\mathcal{M}}$, on pose :

- $0_\mathcal{M} = 0_\mathbb{N}$ (on notera ensuite simplement 0) ;
- $s_\mathcal{M}(\omega_i) = \omega_i$, $s_\mathcal{M}(n) = n + 1$;
- $\omega_i +_\mathcal{M} x = \omega_i$, $n +_\mathcal{M} \omega_i = \omega_i$, $n +_\mathcal{M} m = n +_\mathbb{N} m$;
- $0 \times_\mathcal{M} x = 0$; si $x \neq 0$, $x \times_\mathcal{M} \omega_i = \omega_i$; si $n \neq 0$, $\omega_i \times_\mathcal{M} n = \omega_i$; $n \times_\mathcal{M} m = n \times_\mathbb{N} m$;
- $=_\mathcal{M}$ est l'égalité.

La théorie de l'arithmétique élémentaire est bien respectée, et pourtant, $\underbrace{\omega_1 +_\mathcal{M} \omega_2}_{\omega_1} \neq \underbrace{\omega_2 +_\mathcal{M} \omega_1}_{\omega_2}$.

3. L'arithmétique de Robinson n'est donc pas complète car la formule $\forall x \forall y\ (x + y = y + x)$ n'est si vraie dans tout modèle de l'arithmétique de Robinson, ni fausse dans tout modèle de l'arithmétique de Robinson.

Solution 11.4. Théorème de Craig

Soit $\mathcal{T}$ une théorie récursivement énumérable. Il existe donc un énumérateur des formules de $\mathcal{T}$, on note $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ une énumération des formules de $\mathcal{T}$. On pose φ^m la formule

$$\underbrace{\varphi \wedge \cdots \wedge \varphi}_{m \text{ fois}},$$

cette formule est bien évidemment équivalence à φ. On pose l'ensemble $\mathtt{Ax} \overset{def}{=} \{\varphi_m^m \mid m \in \mathbb{N}^*\}$. On a $\mathcal{T} = \mathtt{Th}(\mathtt{Ax})$ puisque toutes les formules φ_n sont conséquences logiques de $\mathtt{Ax}$ et que les formules (φ_n) forment une énumération de $\mathcal{T}$.
Montrons maintenant que l'ensemble $\mathtt{Ax}$ est un ensemble récursif afin de prouver que $\mathtt{Ax}$ est bien une axiomatisation. Il faut donc trouver un algorithme qui prend en entrée une formule φ et qui renvoie *oui* si $\varphi \in \mathtt{Ax}$ et *non* sinon.

Algorithme 1 : Craig(φ)

Entrée : une formule φ.
Sortie : *oui* si la formule $\varphi \in \mathtt{Ax}$, *non* sinon.

si φ est φ_1 **alors**
    renvoyer *oui*
sinon
    si φ est de la forme ψ^m pour ψ une formule et $m \geqslant 2$ **alors**
        Calculer φ_m. (faisable en temps fini)
        si $\psi = \varphi_m$ **alors**
            renvoyer *oui*
        sinon
            renvoyer *non*
    sinon
        renvoyer *non*

Par l'algorithme **Craig**, l'ensemble $\mathtt{Ax}$ est récursif, donc $\mathcal{T}$ admet une axiomatisation.

Solution 11.5. Disjonction de théories

1. Non, par exemple, pour $\varphi_1 \in \mathcal{T}_1$ et $\varphi_2 \in \mathcal{T}_2$, la formule $\neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$ est conséquence logique de $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ (car équivalente, donc en particulier conséquence logique). Or la formule $\neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$ ne s'écrit pas comme une disjonction.
2. Soit $\mathcal{M}$ une structure. Montrons que

   $$\mathcal{M} \models \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 \text{ ssi } \mathcal{M} \models \mathcal{T}_1 \text{ ou } \mathcal{M} \models \mathcal{T}_2.$$

   $\boxed{\Leftarrow}$ Sans perte de généralité, si $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_1$. Montrons que $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$. Soit $\theta \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$. Il existe donc $\varphi \in \mathcal{T}_1$ et $\psi \in \mathcal{T}_2$ telles que $\varphi \vee \psi \models \theta$. Comme $\mathcal{M} \models \varphi$ par hypothèse, alors $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$. Donc $\mathcal{M} \models \theta$. Ce qui conclut.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée, si $\mathcal{M} \not\models \mathcal{T}_1$ et $\mathcal{M} \not\models \mathcal{T}_2$, alors il existe une formule $\varphi \in \mathcal{T}_1$ (resp. $\psi \in \mathcal{T}_2$) telle que $\mathcal{M} \not\models \varphi$ (resp. $\mathcal{M} \not\models \psi$). Donc $\mathcal{M} \not\models \varphi \vee \psi$. Ainsi $\mathcal{M} \not\models \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$.

   On note $Mod(\mathcal{T}_1) \stackrel{def}{=} \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \mathcal{T}_1\}$, de même pour $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$.
   Autrement dit, on a démontré que

   $$Mod(\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2) = Mod(\mathcal{T}_1) \cup Mod(\mathcal{T}_2).$$

   Montrons que, pour toute formule φ, on a $\varphi \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ ssi $\varphi \in \mathcal{T}_1$ et $\varphi \in \mathcal{T}_2$.

   $$\begin{aligned} & \varphi \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 \\ \text{ssi } & \text{pour tout } \mathcal{M} \in Mod(\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2), \text{ on a } \mathcal{M} \models \varphi \\ \text{ssi } & \text{pour tout } \mathcal{M} \in Mod(\mathcal{T}_1) \cup Mod(\mathcal{T}_2), \text{ on a } \mathcal{M} \models \varphi \\ \text{ssi } & \text{pour tout } \mathcal{M} \in Mod(\mathcal{T}_1), \text{ on a } \mathcal{M} \models \varphi \text{ et pour tout } \mathcal{M} \in Mod(\mathcal{T}_2), \text{ on a } \mathcal{M} \models \varphi \\ \text{ssi } & \varphi \in \mathcal{T}_1 \text{ et } \varphi \in \mathcal{T}_2 \end{aligned}$$

   Ainsi, si les théories $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont récursives, alors $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ est récursive, car pour savoir si une formule φ appartient à $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$, il suffit de tester si $\varphi \in \mathcal{T}_1$ et $\varphi \in \mathcal{T}_2$.
3. Non, car, sans perte de généralité, on peut prendre une formule φ de $\mathcal{T}_1$ qui n'est pas dans $\mathcal{T}_2$. Par complétude de $\mathcal{T}_2$, on a $\neg\varphi \in \mathcal{T}_2$. Or on vient de voir que $\varphi \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ ssi $\varphi \in \mathcal{T}_1$ et $\varphi \in \mathcal{T}_2$, donc on a ni $\varphi \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ ni $\neg\varphi \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$